Th.S Lê Thị Hương
Th.S Nguyễn Kiếm Th.S Hồ Xuân Thắng

# PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC

- Bồi dưỡng và nâng cao kĩ năng giải toán
- Dành cho học sinh ban cơ bản và ban KHTN ôn luyện và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia (tốt nghiệp, tuyển sinh...) do bộ GD&ĐT tổ chức.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899

***

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc* PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập* NGUYỄN BÁ THÀNH

*Biên tập nội dung*
TRẦN VĂN HÙNG
*Sửa bài*
HOÀNG NGUYÊN, LÊ HOÀ
*Chế bản*
CÔNG TI ANPHA
*Trình bày bìa*
SƠN KỲ
*Đối tác liên kết xuất bản*
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC**
Mã số: 1L-03ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH In bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 1140-2008/CXB/07-200/ĐHQGHN, ngày 23/12/2008.
Quyết định xuất bản số: 03LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.

# LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm giúp các em học sinh có thêm tư liệu rèn luyện giải toán THPT và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia (tốt nghiệp, tuyển sinh) do Bộ GD&ĐT tổ chức, nhóm tác giả Th.S Lê Thị Hương, Th.S Nguyễn Kiếm, Th.S Hồ Xuân Thắng đã tổ chức biên soạn bộ sách *"Phân loại và phương pháp giải toán"* gồm các chuyên đề:

1. *Khảo sát hàm số*
2. *Hình học không gian*
3. *Lượng giác*
4. *Hình học giải tích*
5. *Tích phân*

Nội dung kiến thức của các chuyên đề này bám sát chương trình và kiến thức toán THPT (chương trình chuẩn - nâng cao) mới của Bộ GD&ĐT.

Các tác giả đã trình bày một cách có hệ thống để học sinh nắm vững phương pháp giải các dạng toán mẫu mực điển hình thường xuất hiện trong các kì thi ĐH-CĐ... Cùng với các lời giải giản dị, dễ hiểu còn có những lời giải độc đáo, mang tính tìm tòi, sáng tạo...

Với các dạng toán đa dạng, phong phú đã được phân loại trong các tập sách này, chúng tôi tin rằng đây sẽ là tài liệu cần thiết cho các bạn học sinh trong việc rèn kĩ năng giải toán và chuẩn bị ôn thi của mình.

Trong quá trình biên soạn, các tác giả dù đã rất cố gắng để kịp phục vụ bạn đọc, song do phải trình bày một khối lượng lớn thông tin nên cuốn sách có thể còn những khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong nhận được những góp ý chân thành của các thầy, cô giáo, các bạn học sinh để trong lần tái bản sau, bộ sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gửi về:

***- Trung tâm Sách giáo dục Anpha***
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5.
ĐT: 08.38547464

***- Công ti Sách - Thiết bị giáo dục Anpha***
50 Nguyễn Văn Săng, Q.Tân Phú.
ĐT: 08.62676463 - 08.38107718.
email: *alphabookcenter@yahoo.com*

# Chương I: BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

## A – CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

**1. Hệ thức giữa các hàm số lượng giác:**

$$\sin^2x + \cos^2x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x.\cot x = 1$$

$$1 + \tan^2x = \frac{1}{\cos^2x}\ ;\ 1 + \cot^2x = \frac{1}{\sin^2x}$$

**2. Các công thức cộng:**

$$\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x.\cos y - \sin y.\cos x$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x.\tan y}$$

**3. Các công thức cung nhân đôi:**

$$\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\sin^2x$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2x}$$

**4. Công thức hạ bậc:** $\cos^2x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin^2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

**5. Các công thức tính theo tang của cung chia đôi:**

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có: $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$

**6. Các công thức biến đổi tích thành tổng:**

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$$

$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

**7. Các công thức biến đổi tổng thành tích:**

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

**8. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt:**

*** Cung đối nhau:** $\alpha$ **và** $-\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

*** Cung bù nhau:** $\alpha$ **và** $\pi - \alpha$ **:**

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

*** Cung hơn kém** $\pi$ **:** $\alpha$ **và** $\pi + \alpha$ **:**

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

*** Cung phụ nhau:** $\alpha$ **và** $\frac{\pi}{2} - \alpha$ **:**

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$

***Để giải các bài toán về biến đổi lượng giác, ta thường vận dụng các phương pháp sau:***

*1) Áp dụng các phép biến đổi Đại số để sử dụng các công thức lượng giác cơ bản.*

*2) Trong trường hợp biểu thức có chứa nhiều hàm số lượng giác, trước hết ta cần tìm cách giảm bớt số hàm số lượng giác tham gia.*

*3) Trong trường hợp biểu thức có chứa các hàm số lượng giác của nhiều cung khác nhau, ta nên dựa vào các công thức của các cung có liên quan đặc biệt để tìm cách quy về một biểu thức các hàm số lượng giác của cùng một cung hoặc của một số cung ít hơn.*

*4) Khi biểu thức chứa các luỹ thừa bậc chẵn của sinx hoặc cosx thì nên nghĩ đến việc sử dụng công thức hạ bậc.*

*5) Khi biểu thức là tổng (hoặc tích) của các số hạng bậc nhất đối với sinx, cosx, tanx thì nên nghĩ đến việc sử dụng các công thức biến đổi tổng thành tích (hoặc tích thành tổng) một cách hợp lý.*

## B – CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1: Rút gọn các biểu thức lượng giác.

**Chứng minh các đẳng thức lượng giác.**

***Phương pháp:*** Ngoài những lưu ý đã nêu trên, ta cần chú ý thêm:

1) Khi rút gọn một biểu thức lượng giác có dạng phân thức thì nên biến tổng thành tích và cố gắng làm xuất hiện các nhân tử chung ở tử và mẫu của biểu thức để đơn giản.

2) Khi chứng minh đẳng thức lượng giác nên xuất phát từ vế có biểu thức phức tạp ta biến đổi thành vế có biểu thức đơn giản.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$.

b) $B = \dfrac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a}$.

c) $C = \cos^2 a + \cos^2(a+b) - 2\cos a.\cos b.\cos(a+b)$.

d) $D = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)(1+\sin x)}{\sin x}$.

e) $E = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 910^\circ)$
$+ 2\sin(720^\circ - x) + \cos(540^\circ - x)$.

***Giải***

a) $A = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right] = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[\dfrac{\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right]$

$$= \frac{(1+\cos x)(2-2\cos x)}{\sin^3 x} = \frac{2(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x}.$$

b) $B = \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a} = \frac{(\sin a + \sin 7a) + (\sin 3a + \sin 5a)}{(\cos a + \cos 7a) + (\cos 3a + \cos 5a)}$

$$= \frac{2\sin 4a \cos 3a + 2\sin 4a \cos a}{2\cos 4a \cos 3a + 2\cos 4a \cos a} = \frac{2\sin 4a(\cos 3a + \cos a)}{2\cos 4a(\cos 3a + \cos a)} = \tan 4a.$$

c) $C = \cos^2 a + \cos^2(a+b) - 2\cos a.\cos b.\cos(a+b)$

$= \cos^2 a + \cos^2(a+b) - [\cos(a+b) + \cos(a-b)].\cos(a+b)$

$= \cos^2 a + \cos^2(a+b) - \cos^2(a+b) - \cos(a-b).\cos(a+b)$

$= \cos^2 a - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \frac{1+\cos 2a}{2} - \frac{\cos 2a}{2} - \frac{\cos 2b}{2}$

$= \frac{1-\cos 2b}{2} = \sin^2 b.$

d) $D = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)(1+\sin x)}{\sin x} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]}{\sin x}$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

e) $E = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 910^\circ) + 2\sin(720^\circ - x)$

$+ \cos(540^\circ - x) = \cos[(90^\circ - x) + 180^\circ] - 2\sin[(x - 90^\circ) - 360^\circ]$

$+ \cos[(x + 90^\circ) + 2.360^\circ] + 2\sin(-x + 2.360^\circ) + \cos[(180^\circ - x) + 360^\circ]$

$= -\cos(90^\circ - x) - 2\sin(x - 90^\circ) + \cos(x + 90^\circ) + 2\sin(-x) + \cos(180^\circ - x)$

$= -\sin x + 2\sin(90^\circ - x) + \cos[90^\circ - (-x)] - 2\sin x - \cos x$

$= -3\sin x + 2\cos x - \sin x - \cos x = \cos x - 4\sin x.$

**Bài 2:** Chứng minh các đẳng thức:

a) $\sin(a + 60^\circ) + \cos(a + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\left(\cot\frac{a}{2} - \tan\frac{a}{2}\right).$

b) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$

d) $\sin^2(30^\circ - x) + \sin^2(30^\circ + x) - \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$.

e) $\cos 3x = 4\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

f) $\sin 3x = 4\sin x.\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

### *Giải*

a) Ta có: * $\sin(a + 60^\circ) + \cos(a + 30^\circ) = \sin(a + 60^\circ) + \cos[90^\circ - (60^\circ - a)]$

$= \sin(a + 60^\circ) + \sin(60^\circ - a) = 2\sin 60^\circ \cos a = \sqrt{3}.\cos a$

$$* \ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a(\cot\frac{a}{2} - \tan\frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\left(\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} - \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a.\frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin a.\cos a}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sin a.\cos a}{\sin a} = \sqrt{3}\cos a$$

Vậy: $\sin(a + 60^\circ) + \cos(a + 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a(\cot\dfrac{a}{2} - \tan\dfrac{a}{2})$.

b) $$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x.\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x.\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x.$$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos 2x.\cos\frac{\pi}{4} + \sin 2x.\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

d) $\sin^2(30^\circ - x) + \sin^2(30^\circ + x) - \sin^2 x$

$$= \frac{1 - \cos(60^\circ - 2x)}{2} + \frac{1 - \cos(60^\circ + 2x)}{2} - \sin^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}[\cos(60^\circ - 2x) + \cos(60^\circ + 2x)] - \sin^2 x =$$

$$= 1 - \cos 60^\circ.\cos 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

e) $4\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2\cos x\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos 2x\right)$

$= -\cos x + 2\cos x.\cos 2x = -\cos x + (\cos 3x + \cos x) = \cos 3x.$

f) $4\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\sin x.\cos 2x + \sin x = \sin x + (\sin 3x - \sin x) = \sin 3x.$

Nhận xét: Từ e) và f) ta có: $4\tan x.\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \tan 3x.$

## Dạng 2: Tính giá trị các biểu thức lượng giác

***Phương pháp:***

- Dựa vào cung có liên quan đặc biệt. Ta giữ lại các góc (cung) nhọn, các trường hợp khác ta quy về các góc (cung) nhọn.
- Dựa vào các công thức biến đổi tổng thành tích và ngược lại.
- Sử dụng các công thức cộng và nhân.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Tính giá trị các biểu thức

a) $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 180^\circ.$

b) $B = \sin 825^\circ\cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ\sin(-555^\circ) + \tan 155^\circ\tan 245^\circ.$

c) $C = \dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ.\cot 18^\circ.$

*Giải*

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
&\cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ\\
&\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ\\
&\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ\\
&\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ\\
&\cos 180^\circ = -1.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = (\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cos 80^\circ) - (\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cos 80^\circ) - 1 = -1.$$

b)

$$\begin{aligned}
B &= \sin 825^\circ\cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ\sin(-555^\circ) + \tan 155^\circ\tan 245^\circ\\
&= \sin(105^\circ + 2.360^\circ)\cos 15^\circ + \cos 75^\circ\sin(165^\circ - 2.360^\circ)\\
&\qquad + \tan(180^\circ - 25^\circ)\tan(65^\circ + 180^\circ)\\
&= \sin 105^\circ\cos 15^\circ + \cos 75^\circ\sin 165^\circ - \tan 25^\circ\tan 65^\circ\\
&= \sin[90^\circ - (-15^\circ)]\cos 15^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ)\sin(180^\circ - 15^\circ)\\
&\qquad - \tan 25^\circ\tan(90^\circ - 25^\circ)\\
&= \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - \tan 25^\circ.\cot 25^\circ = 0.
\end{aligned}$$

c) $$C = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ.\cot 18^\circ$$

$$= \frac{\left[\cot 44^\circ + \tan(180^\circ + 46^\circ)\right]\cos(46^\circ + 360^\circ)}{\cos(-44^\circ + 360^\circ)} - \cot(90^\circ - 18^\circ)\cot 18^\circ$$

$$= \frac{\left(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ\right)\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \tan 18^\circ \cot 18^\circ$$

$$= \frac{\left[\cot 44^\circ + \tan(90^\circ - 44^\circ)\right]\cos(90^\circ - 44^\circ)}{\cos 44^\circ} - 1$$

$$= \frac{2\cot 44^\circ.\sin 44^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = 2\cot 44^\circ.\tan 44^\circ - 1 = 2 - 1 = 1.$$

**Bài 2:** Tính giá trị các biểu thức

a) $A = \dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

b) $B = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \dfrac{1}{\cos 20^\circ}$.

c) $C = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

***Giải***

a) $$A = \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2.\frac{1}{2} + 2\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$$

b) $$B = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = 4\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= 4\frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = 4\frac{\sin(60^\circ - 20^\circ)}{\sin 40^\circ} = 4\frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 4.$$

c) Ta có: $\sin\dfrac{\pi}{7}.C = \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2}(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}) + \frac{1}{2}(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}) + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

Vậy: $C = -\dfrac{1}{2}$.

**Bài 3:** Tính giá trị các biểu thức

a) $A = \sin 75^\circ + \tan 15^\circ$ b) $B = \sin\dfrac{\pi}{12} - 2\cos\dfrac{\pi}{12}$

c) $C = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ d) $D = \tan 10^\circ.\tan 20^\circ.\tan 30^\circ...\tan 80^\circ$

***Giải***

a) $A = \sin 75^\circ + \tan 15^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) + \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ.\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^2 + 4(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 4}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2}{2(\sqrt{3}+1)}.$$

b) $B = \sin\dfrac{\pi}{12} - 2\cos\dfrac{\pi}{12}$

Ta có: $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\Rightarrow B = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$

c) $C = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{1}{2}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ - \cos 120^\circ)$

$$= \frac{1}{2}\sin 20^\circ.\cos 40^\circ + \frac{1}{4}\sin 20^\circ = \frac{1}{4}(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) + \frac{1}{4}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

d) $D = \tan 10^\circ.\tan 20^\circ.\tan 30^\circ...\tan 80^\circ$

Ta có: $\tan 80^\circ = \tan(90^\circ - 10^\circ) = \cot 10^\circ$

$\tan 70^\circ = \tan(90^\circ - 20^\circ) = \cot 20^\circ$

$\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \cot 30^\circ$

$\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$

$\Rightarrow D = (\tan 10^\circ \cot 10^\circ)(\tan 20^\circ \cot 20^\circ)(\tan 30^\circ \cot 30^\circ)(\tan 40^\circ \cot 40^\circ) = 1.$

**Bài 4:** Cho tanx, tany là hai nghiệm của phương trình:

$$aX^2 + bX + c = 0 \qquad (a \neq c)$$

Tính theo a, b, c giá trị của:

$$M = a\sin^2(x + y) + b\sin(x + y)\cos(x + y) + c\cos^2(x + y) \quad \left(x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

***Giải***

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} \tan x + \tan y = -\dfrac{b}{a} \\ \tan x.\tan y = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Từ đó: $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}}{1 - \dfrac{c}{a}} = -\dfrac{b}{a - c} = \dfrac{b}{c - a}$

Ta có:
$$\begin{aligned} M &= a\sin^2(x + y) + b\sin(x + y)\cos(x + y) + c\cos^2(x + y) \\ &= \cos^2(x + y)[a\tan^2(x + y) + b\tan(x + y) + c] \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(x + y)}\left[\tan^2(x + y) + b\tan(x + y) + c\right] \\ &= \frac{a.\dfrac{b^2}{(c - a)^2} + b.\dfrac{b}{c - a} + c}{1 + \dfrac{b^2}{(c - a)^2}} = \frac{ab^2 + b^2(c - a) + c(c - a)^2}{(c - a)^2 + b^2} \\ &= \frac{ab^2 + b^2c - b^2a + c^3 - 2ac^2 + a^2c}{(c - a)^2 + b^2} = \frac{c(b^2 + c^2 - 2ac + a^2)}{(c - a)^2 + b^2} \\ &= \frac{c\left[(c - a)^2 + b^2\right]}{(c - a)^2 + b^2} = c. \end{aligned}$$

## Dạng 3: Chứng minh giá trị của biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến số.

*Phương pháp:* Tính toán, rút gọn biểu thức để thu được kết quả trong đó không chứa biến số.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \sin^4x(1 + \sin^2x) + \cos^4x(1 + \cos^2x) + 5\sin^2x\cos^2x + 1$

b) $B = \dfrac{\cot^2\dfrac{x}{2} - \cot^2\dfrac{3x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}.\cos x(1 + \cot^2\dfrac{3x}{2})}$.

c) $C = \sin x\sqrt{1 - \cos x\sqrt{1 - \sin^2 x}} + \cos x\sqrt{1 - \sin x\sqrt{1 - \cos^2 x}}, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

***Giải***

a) $A = \sin^4x(1 + \sin^2x) + \cos^4x(1 + \cos^2x) + 5\sin^2x\cos^2x + 1$

$= \sin^4x + \sin^6x + \cos^4x + \cos^6x + 5\sin^2x\cos^2x + 1$

$= (\sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x\cos^2x) + [\sin^6x + \cos^6x$

$+ 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x) + 1]$

$= (\sin^2x + \cos^2x)^2 + (\sin^2x + \cos^2x)^3 = 2.$

b) $$B = \frac{\cot^2\dfrac{x}{2} - \cot^2\dfrac{3x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}.\cos x(1 + \cot^2\dfrac{3x}{2})} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}} - 1\right) - \left(\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3x}{2}} - 1\right)}{\cos^2\dfrac{x}{2}.\cos x.\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3x}{2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}} - \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3x}{2}}}{\cos^2\dfrac{x}{2}.\cos x.\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3x}{2}}} = \frac{\sin^2\dfrac{3x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}.\cos x.\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{(\sin\dfrac{3x}{2} - \sin\dfrac{x}{2})(\sin\dfrac{3x}{2} + \sin\dfrac{x}{2})}{\dfrac{1}{4}\sin^2x.\cos x}$$

$$= \frac{16\cos x\sin\dfrac{x}{2}\sin x\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2x.\cos x} = \frac{8\sin^2x.\cos x}{\sin^2x.\cos x} = 8.$$

c) Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.

$C = \sin x\sqrt{1 - \cos x\sqrt{1 - \sin^2 x}} + \cos x\sqrt{1 - \sin x\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

$= \sin x\sqrt{1 - \cos x\sqrt{\cos^2 x}} + \cos x\sqrt{1 - \sin x\sqrt{\sin^2 x}}$

$= \sin x\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin^2x + \cos^2x = 1.$

**Bài 2:** Xác định giá trị của a để các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \sin^6x + \cos^6x + a(\sin^4x + \cos^4x) + 2\sin^2 2x$.

b) $B = \cos x + \cos(x + a) + \cos(x + 3a) + \cos(x + 4a)$.

***Giải***

a) $A = \sin^6x + \cos^6x + a(\sin^4x + \cos^4x) + 2\sin^2 2x$

$= (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x.\cos^2x) + a[(\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x] + 2\sin^2 2x$

$= (1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) + a(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) + 2\sin^2 2x$

$= 1 + a + (\frac{5}{4} - \frac{a}{2})\sin^2 2x.$

Để A không phụ thuộc vào x thì:

$\frac{5}{4} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}.$

b) $B = \cos x + \cos(x + a) + \cos(x + 3a) + \cos(x + 4a)$

$= [\cos x + \cos(x + 4a)] + [\cos(x + a) + \cos(x + 3a)]$

$= 2\cos(x + 2a)\cos 2a + 2\cos(x + 2a)\cos a = 2(\cos 2a + \cos a)\cos(x + 2a).$

Khi đó, để B không phụ thuộc vào x thì:

$$\cos 2a + \cos a = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 a + \cos a - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos a = -1\\ \cos a = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = (2k+1)\pi\\ a = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

## Dạng 4: Chứng minh các đẳng thức có điều kiện.

***Phương pháp:*** Biến đổi để làm xuất hiện khả năng áp dụng các điều kiện đã cho hoặc là khai thác ngay các điều kiện để sử dụng vào biến đổi đẳng thức.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Cho $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Chứng minh:

a) $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1 - 2\sin x.\sin y.\sin z.$

b) $\cos x.\cos y.\cos z = \sin x.\sin y.\cos z + \sin x.\cos y.\sin z + \cos x.\sin y.\sin z.$

***Giải***

a) Ta có: $\cos(x + y) = \cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z$

$\Rightarrow \cos x.\cos y - \sin x.\sin y = \sin z$

$\Rightarrow (\cos x.\cos y - \sin x.\sin y)^2 = \sin^2z$

$\Rightarrow \cos^2x.\cos^2y + \sin^2x.\sin^2y - 2\cos x.\cos y.\sin x.\sin y = \sin^2z$

$\Rightarrow (1 - \sin^2x)(1 - \sin^2y) + \sin^2x.\sin^2y - 2\cos x.\cos y.\sin x.\sin y = \sin^2z$

$\Rightarrow 1 - \sin^2x - \sin^2y + 2\sin^2x.\sin^2y - 2\cos x.\cos y.\sin x.\sin y = \sin^2z$

$\Rightarrow \sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1 - 2\sin x.\sin y(\cos x.\cos y - \sin x.\sin y)$
$\Rightarrow \sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1 - 2\sin x.\sin y.\cos(x + y)$
$\Rightarrow \sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1 - 2\sin x.\sin y.\sin z.$

b) Ta có: $\cos(x + y + z) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos(x + y).\cos z - \sin(x + y).\sin z = 0$
$\Rightarrow \cos x.\cos y.\cos z - \sin x.\sin y.\cos z - \sin x.\cos y.\sin z - \cos x.\sin y.\sin z = 0$
$\Rightarrow \cos x.\cos y.\cos z = \sin x.\sin y.\cos z + \sin x.\cos y.\sin z + \cos x.\sin y.\sin z.$

**Bài 2:** a) Cho $5\sin y = \sin(2x + y)$; $x + y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Chứng minh: $\tan(x + y) = \dfrac{3}{2}\tan x.$

b) Cho $\cos x = \cos y.\cos z$ $(x \pm z \neq k\pi, y \neq k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z}))$.

Chứng minh: $\tan\dfrac{x+z}{2}\tan\dfrac{x-z}{2} = \tan^2\dfrac{y}{2}.$

c) Cho $x + y + z + t = 2\pi$. Chứng minh:
$\cos^2x + \cos^2y - \cos^2z - \cos^2t = -2\cos(z + t)\sin(y + z)\sin(y + t).$

***Giải***

a) Khi $x = k\pi$, ta có: $5\sin y = \sin(y + 2k\pi) = \sin y \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$

Từ đó: $\tan(x + y) = \tan(2k\pi) = 0 = \dfrac{3}{2}\tan x.$

Khi $x \neq k\pi \Rightarrow \tan x \neq 0$. Do đó:

$$\frac{\tan(x+y)}{\tan x} = \frac{\sin(x+y).\cos x}{\sin x.\cos(x+y)} = \frac{\sin y + \sin(2x+y)}{\sin(-y) + \sin(2x+y)} = \frac{\sin y + 5\sin y}{-\sin y + 5\sin y} = \frac{3}{2}$$

Vậy: $\tan(x + y) = \dfrac{3}{2}\tan x.$

b) Ta có: $\tan\dfrac{x+z}{2}\tan\dfrac{x-z}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{x+z}{2}.\sin\dfrac{x-z}{2}}{\cos\dfrac{x+z}{2}.\cos\dfrac{x-z}{2}} = \dfrac{\cos z - \cos x}{\cos z + \cos x}$

$$= \frac{\cos z - \cos y.\cos z}{\cos z + \cos y.\cos z} = \frac{\cos z(1 - \cos y)}{\cos z(1 + \cos y)} = \frac{2\sin^2\dfrac{y}{2}}{2\cos^2\dfrac{y}{2}} = \tan^2\frac{y}{2}.$$

c) Ta có: $x = 2\pi - (y + z + t) \Rightarrow \cos^2x = \cos^2(y + z + t).$

Khi đó: $\cos^2x + \cos^2y - \cos^2z - \cos^2t$

$= \cos^2(y + z + t) + \cos^2y - \cos^2z - \cos^2t$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2(y + z + t) + 1 + \cos 2y - 1 - \cos 2z - 1 - \cos 2t]$$

$$= \frac{1}{2}\{[\cos 2(y + z + t) + \cos 2y] - (\cos 2z + \cos 2t)\}$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos(2y + z + t)\cos(z + t) - 2\cos(z + t)\cos(z - t)]$$

$$= \cos(z + t)[\cos(2y + z + t) - \cos(z - t)] = -2\cos(z + t)\sin(y + z)\sin(y + t).$$

**Bài 3:** a) Cho $P = \cos 8a.\cos 4a.\cos 2a.\cos a$. Chứng minh: $16P.\sin a = \sin 16a$.

b) Cho $Q = \left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4} + \cos\frac{y}{4}\right)\left(\cos\frac{x}{8} + \cos\frac{y}{8}\right)\left(\cos\frac{x}{16} + \cos\frac{y}{16}\right)$

Chứng minh: $16Q\left(\cos\frac{x}{16} - \cos\frac{y}{16}\right) = \cos x - \cos y$.

***Giải***

a) Ta có: $16P.\sin a = 16.\sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 4a.\cos 8a$

$$= 8\sin 2a.\cos 2a.\cos 4a.\cos 8a$$

$$= 4\sin 4a.\cos 4a.\cos 8a$$

$$= 2\sin 8a.\cos 8a = \sin 16a.$$

b) Ta có:

$$Q = 16.\cos\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{4}\cos\frac{x+y}{8}\cos\frac{x-y}{8}\cos\frac{x+y}{16}\cos\frac{x-y}{16}\cos\frac{x+y}{32}\cos\frac{x-y}{32}$$

Đặt $a = \frac{x+y}{32}$; $b = \frac{x-y}{32}$, ta có: $\begin{cases} a + b = \frac{x}{16} \\ a - b = \frac{y}{16} \end{cases}$

Khi đó: $Q = 16.\cos 8a.\cos 8b.\cos 4a.\cos 4b.\cos 2a.\cos 2b.\cos a.\cos b$

Theo câu a), ta có:

$\sin 16a = 16.\sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 4a.\cos 8a$

$\sin 16b = 16.\sin b.\cos b.\cos 2b.\cos 4b.\cos 8b$

$\Rightarrow \sin 16a.\sin 16b = 16.\sin a.\sin b.Q$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[\cos 16(a - b) - \cos 16(a + b)] = 8[\cos(a - b) - \cos(a + b)].Q$

$\Rightarrow \cos y - \cos x = 16(\cos\frac{y}{16} - \cos\frac{y}{16}).Q$

$\Rightarrow 16Q\left(\cos\frac{x}{16} - \cos\frac{y}{16}\right) = \cos x - \cos y.$

## Dạng 5: Tính tổng hữu hạn và tích hữu hạn

***Phương pháp:*** * Để tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta cố gắng biểu diễn các số hạng kế tiếp của $S_n$ bởi các hiệu để khi cộng lại chúng khử lẫn nhau, chẳng hạn:

$$u_1 = a_1 - a_2,\ u_2 = a_2 - a_3, ...,\ u_n = a_n - a_{n+1} \Rightarrow S_n = a_1 - a_{n+1}$$

* Để tính tích $P_n = u_1.u_2...u_n$, ta cố gắng biểu diễn các nhân tử kế tiếp của $P_n$ bởi các thương để khi nhân lại chúng khử lẫn nhau, chẳng hạn:

$$u_1 = \frac{a_1}{a_2},\ u_2 = \frac{a_2}{a_3}, ...,\ u_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow P_n = \frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Tính: a) $S_n = \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{a}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$.

b) $T_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx$.

***Giải***

a) Ta có: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \Rightarrow \cot 2x = \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x} = \frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2}\tan x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\cot x - \cot 2x$$

Từ đó: $\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2} - \cot a$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{a}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{2^3}\tan\frac{a}{2^3} = \frac{1}{2^3}\cot\frac{a}{2^3} - \frac{1}{2^2}\cot\frac{a}{2^2}$$

......

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{a}{2^{n-1}}$$

Cộng vế với vế ta được: $S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - \cot a$.

b) Ta có: $\sin\frac{x}{2}.T_n = \sin\frac{x}{2}\sin x + \sin\frac{x}{2}\sin 2x + \sin\frac{x}{2}\sin 3x + ... + \sin\frac{x}{2}\sin nx$

Hơn nữa: $\sin\frac{x}{2}\sin x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)$

$$\sin\frac{x}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right)$$

$$\sin\frac{x}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\right)$$

......

$$\sin\frac{x}{2}\sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\sin\frac{x}{2}.T_n = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right] = \sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

Nếu $x \neq 2k\pi$ thì: $T_n = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Nếu $x = 2k\pi$ thì: $T_n = 0$.

**Bài 2:** Tính: a) $P_n = \left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos 2x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos 4x}\right)...\left(1 + \dfrac{1}{\cos 2^n x}\right)$.

b) $D_n = \cos\dfrac{a}{2}.\cos\dfrac{a}{2^2}.\cos\dfrac{a}{2^3}...\cos\dfrac{a}{2^n}$.

***Giải***

a) Ta có: $1 + \dfrac{1}{\cos 2a} = \dfrac{\cos 2a + 1}{\cos 2a} = \dfrac{2\cos^2 a}{\cos 2a} = \dfrac{2\cos^2 a.\sin 2a}{2\cos 2a.\sin a.\cos a} = \dfrac{\tan 2a}{\tan a}$

Từ đó: $1 + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\tan x}{\tan\frac{x}{2}}$

$$1 + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\tan 2x}{\tan x}$$

......

$$1 + \frac{1}{\cos 2^n x} = \frac{\tan 2^n x}{\tan 2^{n-1} x}$$

Nhân vế với vế ta được: $P_n = \dfrac{\tan 2^n x}{\tan\frac{x}{2}}$.

b) Ta có: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$

Từ đó:

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}},\ \cos\frac{a}{2^2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2^2}},\ \cos\frac{a}{2^3} = \frac{\sin\frac{a}{2^2}}{2\sin\frac{a}{2^3}},\ ...,\ \cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{a}{2^n}}$$

Nhân vế với vế ta được: $D_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin \dfrac{a}{2^n}}$.

## C - BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin x$.

b) $B = \sin(\pi + x) - \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

c) $C = \cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

d) $D = \cot(x - 2\pi)\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(x + 2\pi) - 2\sin(x - \pi)$.

e) $E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

f) $F = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 6\tan(3\pi - x)$.

g) $G = 2\sin(790^\circ + x) - \sin(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x)\tan(1260^\circ - x)$.

h) $H = \dfrac{1 + \sin x - 2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{x}{2}\right)}{4\cos\dfrac{x}{2}}$.

**Bài 2:** Rút gọn các biểu thức:

a) $A = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

b) $B = \sqrt{\sin^2 x.(1 + \cot x) + \cos^2 x.(1 + \tan x)}$ $\quad (0 < x < \pi, x \neq \frac{\pi}{2})$.

c) $C = \dfrac{\sin^2 2x + 4\sin^4 x}{4 - \sin^2 2x - 4\sin^2 x}$.

d) $D = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.

e) $E = \dfrac{1}{\sin a}\sqrt{\dfrac{1}{1 + \cos a} + \dfrac{1}{1 - \cos a}} - \sqrt{2}$.

f) $F = \dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2} + 3\cos^2\dfrac{x}{2} - 2}{\sin^2 2x.(1 + \cot^2 2x)}$.

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức:

a) $\cos^3x.\sin x - \sin^3x.\cos x$.

b) $\cos^3x.\sin 3x + \sin^3x.\cos 3x$ .

c) $\cos^3x.\cos 3x + \sin^3x.\sin 3x$.

d) $\dfrac{1}{\tan x + \tan 3x} - \dfrac{1}{\cot x + \cot 3x}$.

e) $8\cos^4x - 8\cos^2x + 1$.

f) $\dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

g) $\dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

h) $\dfrac{\sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)}$.

i) $\cos a.\sin(b-c) + \cos b.\sin(c-a) + \cos c.\sin(a-b)$.

j) $\cos^2 a + \cos^2(a+b) - 2\cos a.\cos b.\cos(a+b)$.

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức

a) $\cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(c+a-b) + \cos(a+b-c)$.

b) $\sin(a+b+c) + \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c)$.

c) $\sin a.\sin(b-c).\sin(b+c-a) + \sin b.\sin(c-a).\sin(c+a-b) +$
$+ \sin c.\sin(a-b).\sin(a+b-c)$.

d) $\cos a.\sin(b-c).\cos(b+c-a) + \cos b.\sin.(c-a).\cos(c+a-b)$
$+ \cos c.\sin(a-b).\cos(a+b-c)$.

**Bài 5.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4x + \cos^4x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

b) $\sin^6x + \cos^6x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$.

c) $\sin^8x + \cos^8x = \dfrac{35}{64} + \dfrac{7}{16}\cos 4x + \dfrac{1}{64}\cos 8x$.

d) $\sin^{10}x + \cos^{10}x = \dfrac{63}{128} + \dfrac{15}{32}\cos 4x + \dfrac{5}{128}\cos 8x$.

e) $\cos^6x - \sin^6x = \dfrac{15}{16}\cos 2x + \dfrac{1}{16}\cos 6x$.

f) $\cos^8x - \sin^8x = \dfrac{7}{8}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 6x$.

**Bài 6.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{(1+\tan a)^2 - 2\tan^2 a}{1+\tan^2 a} = \sin 2a + \cos 2a$.

b) $\dfrac{\cot^2\dfrac{a}{2} - \cot^2\dfrac{3a}{2}}{1+\cot^2\dfrac{3a}{2}} = 8\cos\dfrac{a}{2}\cos a$.

c) $\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a-1}{\sin^6 a+\cos^6 a-1}=\dfrac{2}{3}$.

d) $\dfrac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\dfrac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]+\dfrac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b.\sin^2 c}-\cot^2 b\cot^2 c=\cot a-1$.

e) $\dfrac{1}{\sin 2a}+\dfrac{1}{\sin 4a}+\dfrac{1}{\sin 8a}+\dfrac{1}{\sin 16a}=\cot a-\cot 16a$.

f) $\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y).\tan(y-z).\tan(z-x)$.

**Bài 7.** Chứng minh các đẳng thức:

a) $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$.

b) $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$.

c) $\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=\dfrac{3}{2}$.

d) $\sin^2 x+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=\dfrac{3}{2}$.

**Bài 8.** Chứng minh các đẳng thức:

a) $\sin 33^\circ+\cos 63^\circ=\cos 3^\circ$.

b) $\cos 20^\circ+2\sin^2 55^\circ=1+\sqrt{2}\sin 65^\circ$.

c) $\tan 9^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ-\tan 27^\circ=4$.

d) $\dfrac{1}{\cos 290^\circ}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

e) $3\sin 15^\circ\cos 15^\circ+\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ-\cos^4 15^\circ}=-\dfrac{1}{4}$.

f) $\tan\dfrac{\pi}{6}+\tan\dfrac{2\pi}{9}+\tan\dfrac{5\pi}{18}+\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cos\dfrac{\pi}{9}$.

g) $\tan^2\dfrac{\pi}{12}+\tan^2\dfrac{3\pi}{12}+\tan^2\dfrac{5\pi}{12}=15$.

**Bài 9.** Tính:

a) $A=\cos 330^\circ+\sin 315^\circ+\cos 250^\circ+\sin 160^\circ$.

b) $B=\cos 325^\circ+\sin 235^\circ+\tan 205^\circ.\tan 295^\circ$.

c) $C=\dfrac{\sin 234^\circ+\cos 216^\circ}{\sin 144^\circ-\cos 126^\circ}.\tan 36^\circ$.

d) $D=\dfrac{(\cot 44^\circ+\tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ}-\cot 72^\circ.\cot 18^\circ$.

e) $E = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \ldots + \cos 180^\circ$.

f) $F = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \ldots + \cos^2 80^\circ$.

**Bài 10.** Tính:

a) $A = \sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}$.

b) $B = \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$.

c) $C = \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$.

d) $D = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$.

e) $E = \cos 10^\circ.\cos 20^\circ.\cos 30^\circ \ldots \cos 80^\circ$.

f) $F = \sin 10^\circ.\sin 20^\circ.\sin 30^\circ \ldots \sin 80^\circ$.

g) $G = \tan 18^\circ.\tan 36^\circ.\tan 42^\circ.\tan 78^\circ$.

h) $H = 16\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ$.

i) $I = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$.

**Bài 11.** Tính:

a) $A = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \ldots + \cos\frac{9\pi}{11}$.

b) $B = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$.

c) $C = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$.

d) $D = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$.

e) $E = \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ - \cos^2 45^\circ$.

f) $F = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ$.

g) $G = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

h) $H = 8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ$.

i) $I = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$.

**Bài 12.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

b) $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$.

c) $C = \sin^4 x(1 + \sin^2 x) + \cos^4 x(1 + \cos^2 x) + 5\sin^2 x\cos^2 x + 1$.

d) $D = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$.

e) $E = \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)\sin(a - b)$.

f) $F = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$.

g) $G = \sin x\sqrt{1 + \cos x\sqrt{1 - \sin^2 x}} + \cos x\sqrt{1 + \sin x\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ $\left(x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

**Bài 13.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến:

a) $A = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y\cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z\cos x}$.

b) $B = \sin x\sin(y - z)\cos(y + z - x) + \sin y\sin(z - x)\cos(z + x - y)$
$+ \sin z\sin(x - y)\cos(x + y - z)$.

c) $C = \cos x\sin(y - z)\cos(y + z - x) + \cos y\sin(z - x)\cos(z + x - y)$
$+ \cos z\sin(x - y)\cos(x + y - z)$.

d) $D = \cos(x + y)\sin(x - y) + \cos(y + z)\sin(y - z) + \cos(z + t)\sin(z - t)$
$+ \cos(t + x)\sin(t - x)$.

e) $E = \sin(x + y)\sin(x - y)\sin(z + t)\sin(z - t)$
$+ \sin(z + y)\sin(z - y)\sin(t + x)\sin(t - x)$
$+ \sin(t + y)\sin(t - y)\sin(x + z)\sin(x - z)$.

f) $F = \frac{\sin x}{\sin(x-y)\sin(x-z)} + \frac{\sin y}{\sin(y-x)\sin(y-z)} + \frac{\sin z}{\sin(z-x)\sin(z-y)}$.

g) $G = \frac{\cos x}{\sin(x-y)\sin(x-z)} + \frac{\cos y}{\sin(y-x)\sin(y-z)} + \frac{\cos z}{\sin(z-x)\sin(z-y)}$.

**Bài 14.** Xác định giá trị của a sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) $A = \cos 2x - a\sin^2 x + 3\cos^2 x$.

b) $B = \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \sin(x + 3a)$.

c) $C = a(2a\sin x - 1) - 4(a^2 - 1)\sin x\sin^2\frac{x}{2} + 2(a + 1)\cos^2 x - 2\sin x$.

**Bài 15.** Tìm điều kiện của p và q để: $M = p(\sin^6 x + \cos^6 x) - q(\sin^4 x + \cos^4 x)$ không phụ thuộc vào x.

**Bài 16.** Chứng minh rằng nếu $\cos(a + b) = 0$ thì: $\sin(a + 2b) = \sin a$.

**Bài 17.** Chứng minh rằng nếu $a = 2b$, $a + b + c = 180°$ thì:

$$\sin b(\sin b + \sin c) = \sin^2 a.$$

**Bài 18.** Chứng minh rằng nếu $3\sin b = \sin(2a + b)$ thì: $\tan(a + b) = 2\tan a$.

**Bài 19.** Chứng minh rằng nếu $\sin a = A\sin(a + b)$ $(A > 1)$thì:

$$\tan(a + b) = \frac{\sin b}{\cos b - A}.$$

**Bài 20.** Chứng minh rằng nếu: $\frac{a}{b} = \frac{\sin(x-y)}{\sin(x-z)}; \frac{A}{B} = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x-z)}$ và $aB + bA \neq 0$

thì: $\cos(y-z) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

**Bài 21.** Chứng minh rằng nếu: $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ thì:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

**Bài 22.** Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\alpha)}{b} = \frac{\cos(x+2\alpha)}{c} = \frac{\cos(x+3\alpha)}{d} \text{ thì: } \frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}.$$

**Bài 23.** Chứng minh rằng nếu: $\frac{a}{\tan(\alpha+A)} = \frac{b}{\tan(\alpha+B)} = \frac{c}{\tan(\alpha+C)}$

thì: $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(A-B) + \frac{b+c}{b-c}\sin^2(B-C) + \frac{c+a}{c-a}\sin^2(C-A) = 0$.

**Bài 24.** Chứng minh rằng nếu:

$$\tan^2 A\tan^2 B + \tan^2 B\tan^2 C + \tan^2 C\tan^2 A + 2\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C = 1$$

thì: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$.

**Bài 25.** Tính các tổng sau:

a) $A = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + \frac{1}{4^3\cos^2\frac{a}{2^3}} + \ldots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$.

b) $B = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$.

c) $C = \ln(\cos\frac{a}{2}) + \ln(\cos\frac{a}{2^2}) + \ln(\cos\frac{a}{2^3}) + \ldots + \ln(\cos\frac{a}{2^n})$.

d) $D = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2^2 a} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n a}$.

e) $E = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$.

**Bài 26.** Tính các tổng:

a) $A = \sin a + \sin(a+d) + \sin(a+2d) + \ldots + \sin(a+nd)$.

b) $B = \cos a + \cos(a+d) + \cos(a+2d) + \ldots + \cos(a+nd)$.

c) $C = \cos^2 b + \cos^2(b+h) + \cos^2(b+2h) + \ldots + \cos^2(b+nh)$.

d) $D = \sin^2 b + \sin^2(b+h) + \sin^2(b+2h) + \ldots + \sin^2(b+nh)$.

e) $E = \frac{\sin b}{\sin b} + \frac{\sin 3b}{\sin b} + \frac{\sin 5b}{\sin b} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)b}{\sin b}$.

f) $F = \frac{1}{\cos a\cos(a+d)} + \frac{1}{\cos(a+d)\cos(a+2d)} + \ldots + \frac{1}{\cos[a+(n-1)d]\cos(a+nd)}$

$(a \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

g) $G = \frac{1}{\cos a + \cos 3a} + \frac{1}{\cos a + \cos 5a} + \ldots + \frac{1}{\cos a + \cos(2n+1)a}$ $(a \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

**Bài 27.** Tính các tích sau:

a) $A = \cos a.\cos 2a.\cos 2^2a\ldots\cos 2^na$.

b) $B = (2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)(2\cos 2^2a - 1)\ldots(2\cos 2^na - 1)$.

c) $C = (\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2})(\cos\frac{a}{2^2} + \cos\frac{b}{2^2})\ldots(\cos\frac{a}{2^n} + \cos\frac{b}{2^n})$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** a) $A = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin x$

$= -\sin x.(-\cos x) - \cos x.\sin x = 0.$

b) $B = \sin(\pi + x) - \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$= -\sin x - \sin x + \cot(-x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sin x - \cot x + \cot x = -2\sin x.$

c) $C = \cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$= -\cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cot(-x)\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= -\cos x - \cos x + \cot x.\tan x = 1 - 2\cos x.$

d) $D = \cot(x - 2\pi)\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(x + 2\pi) - 2\sin(x - \pi)$

$= \cot x.\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x + 2\sin x = \cot x.(-\sin x) + \cos x + 2\sin x$

$= -\cos x + \cos x + 2\sin x = 2\sin x.$

e) $E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$= 2\cos x + \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x$

$= 2\cos x + \sin x - \cos x - \sin x = \cos x.$

f) $F = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 6\tan(3\pi - x)$

$= \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 6\tan(\pi - x)$

$= -\cos x + \cos x + \cot x - 6\tan x = \cot x - 6\tan x.$

g) $G = 2\sin(790^\circ + x) - \sin(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x)\tan(1260^\circ - x)$

$= 2\sin(60^\circ + x) - \sin(180^\circ - x) + \tan(x - 90^\circ)\tan(180^\circ - x)$

$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x) - \sin x - \cot x.(-\tan x) = \sqrt{3}\cos x + 1.$

h) $H = \dfrac{1 + \sin x - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{4\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos 2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) + \sin x}{4\cos\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{\cos(90^\circ - x) + \sin x}{4\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{2\sin x}{4\cos\frac{x}{2}} = \sin\frac{x}{2}.$

**Bài 2:**

a) $A = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x = \cos^2 x.\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$

$= 1 - \cot^2 x.(1 - \cos^2 x) = 1 - \cot^2 x.\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$

b) $B = \sqrt{\sin^2 x.(1 + \cot x) + \cos^2 x.(1 + \tan x)}$

$= \sqrt{\sin^2 x + \sin x.\cos x + \cos^2 x + \cos x.\sin x}$

$= \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|.$

c) $C = \dfrac{\sin^2 2x + 4\sin^4 x}{4 - \sin^2 2x - 4\sin^2 x} = \dfrac{4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^4 x}{4(1 - \sin^2 x) - 4\sin^2 x\cos^2 x}$

$= \dfrac{4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^4 x}{4\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{4\sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{4\cos^2 x(1 - \sin^2 x)} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}.$

d) $D = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

$= 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x)^2 - [(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x.\cos^4 x]$

$= 2(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 + 4\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\sin^4 x.\cos^4 x$

$- (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 + 2\sin^4 x.\cos^4 x$

$= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 + 4\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4\sin^4 x.\cos^4 x$

$= (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x)$

$+ 2\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x)$

$= (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$

$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$

e) $$E = \frac{1}{\sin a}\sqrt{\frac{1}{1+\cos a}+\frac{1}{1-\cos a}}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sin a}\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 a}}-\sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{\sin a}\sqrt{\frac{2}{\sin^2 a}}-\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 a}-\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 a}-1\right) = \sqrt{2}\cot^2 a.$$

f) $$F = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-2}{\sin^2 2x.(1+\cot^2 2x)} = \frac{2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+\cos^2\frac{x}{2}-2}{\sin^2 2x.\frac{1}{\sin^2 2x}}$$
$$= 2+\cos^2\frac{x}{2}-2 = \cos^2\frac{x}{2}.$$

**Bài 3.**

a) $\cos^3x.\sin x - \sin^3x.\cos x = \cos x.\sin x(\cos^2x - \sin^2x)$
$$= \cos x.\sin x.\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

b) $\cos^3x.\sin 3x + \sin^3x.\cos 3x$
$= (1-\sin^2x).\sin 3x.\cos x + \sin^3x.\cos 3x$
$= \sin 3x.\cos x - \sin^2x.\sin 3x.\cos x + \sin^3x.\cos 3x$
$= \sin 3x.\cos x - \sin^2x(\sin 3x.\cos x - \sin x.\cos 3x)$
$$= \sin 3x.\cos x - \sin^2x.\sin 2x = \sin 3x.\cos x - \frac{1-\cos 2x}{2}.\sin 2x$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 4x) - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 4x$$
$$= \frac{3}{4}\sin 4x.$$

c) $\cos^3x.\cos 3x + \sin^3x.\sin 3x = (1-\sin^2x).\cos 3x.\cos x + \sin^3x.\sin 3x$
$= \cos 3x.\cos x - \sin^2x.\cos 3x.\cos x + \sin^3x.\sin 3x$
$= \cos 3x.\cos x - \sin^2x(\cos 3x.\cos x - \sin x.\sin 3x)$
$$= \cos 3x.\cos x - \sin^2x.\cos 4x = \cos 3x.\cos x - \frac{1-\cos 2x}{2}.\cos 4x$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x.\cos 4x$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 2x.\cos 4x = \frac{1}{2}\cos 2x(1+\cos 4x) = \cos^3 2x.$$

d) $$\frac{1}{\tan x + \tan 3x} - \frac{1}{\cot x + \cot 3x} = \frac{\cos x.\cos 3x}{\sin x.\cos 3x + \sin 3x.\cos x} - \frac{\sin x.\sin 3x}{\sin 3x.\cos x + \sin x.\cos 3x}$$
$$= \frac{\cos x.\cos 3x}{\sin 4x} - \frac{\sin x.\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{\cos x.\cos 3x - \sin x.\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \tan 4x.$$

e) $8\cos^4x - 8\cos^2x + 1 = -8\cos^2x(1-\cos^2x) + 1 = -8\cos^2x.\sin^2x + 1$

$$= 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x.$$

f) $\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}(\cos 4x + 1) + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cos 2x.(\cos 2x + 1) + \frac{1}{4}(\cos 2x + 1)$

$= \frac{1}{2}\cos 2x.\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos^2 x.(1 + \cos 2x) = \cos^4 x.$

g) $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}(\cos 4x + 1) - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cos 2x.(\cos 2x - 1) - \frac{1}{4}(\cos 2x - 1)$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x.\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x.(1 - \cos 2x) = \sin^4 x.$

h) $\dfrac{\sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)} = \dfrac{\sin^2(a+b) - \frac{1-\cos 2a}{2} - \frac{1-\cos 2b}{2}}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)}$

$= \dfrac{\sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)} = \dfrac{-\left[1 - \sin^2(a+b)\right] + \cos(a-b).\cos(a+b)}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)}$

$= \dfrac{-\cos^2(a+b) + \cos(a-b).\cos(a+b)}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)} = \dfrac{-\cos(a+b)\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)}$

$= \dfrac{2\cos(a+b)\sin a.\sin b}{\sin a.\sin b.\sin(a+b)} = 2\cot(a+b).$

i) $\cos a.\sin(b-c) + \cos b.\sin(c-a) + \cos c.\sin(a-b)$

$= \frac{1}{2}[\sin(b-c-a) + \sin(b-c+a)] + \frac{1}{2}[\sin(c-a-b) + \sin(c-a+b)]$

$+ \frac{1}{2}[\sin(a-b-c) + \sin(a-b+c)]$

$= \frac{1}{2}\sin(b-c-a) + \frac{1}{2}\sin(b-c+a) + \frac{1}{2}\sin[-(b-c+a)] + \frac{1}{2}\sin[-(a-b-c)]$

$+ \frac{1}{2}\sin(a-b-c) + \frac{1}{2}\sin[-(b-c-a)]$

$= \frac{1}{2}\sin(b-c-a) + \frac{1}{2}\sin(b-c+a) - \frac{1}{2}\sin(b-c+a) - \frac{1}{2}\sin(a-b-c)$

$+ \frac{1}{2}\sin(a-b-c) - \frac{1}{2}\sin(b-c-a) = 0.$

j) $\cos^2 a + \cos^2(a + b) - 2\cos a.\cos b.\cos(a + b)$

$= \cos^2 a + \cos^2(a + b) - [\cos(a - b) + \cos(a + b)].\cos(a + b)$

$= \cos^2 a + \cos^2(a + b) - \cos(a - b).\cos(a + b) - \cos^2(a + b)$

$= \cos^2 a - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a - \frac{1}{2}(2\cos^2 a - 1) - \frac{1}{2}(2\cos^2 b - 1)$

$= 1 - \cos^2 b = \sin^2 b.$

**Bài 4.**

a) $\cos(a + b + c) + \cos(b + c - a) + \cos(c + a - b) + \cos(a + b - c)$

$= 2\cos(b + c).\cos a + 2\cos a.\cos(c - b) = 2\cos a[\cos(b + c) + \cos(c - b)]$

$= 4\cos a.\cos b.\cos c.$

b) $\sin(a + b + c) + \sin(b + c - a) + \sin(c + a - b) + \sin(a + b - c)$

$= 2\sin(b + c)\cos a + 2\cos a.\sin(c - b) = 2\cos a.[\sin(b + c) + \sin(c - b)]$

$= 4\cos a.\cos b.\sin c.$

c) Ta có: $\sin a.\sin(b - c).\sin(b + c - a) = \sin a.\frac{1}{2}[\cos(a - 2c) - \cos(2b - a)]$

$= \frac{1}{2}\sin a.\cos(a - 2c) - \frac{1}{2}\sin a.\cos(2b - a)$

$= \frac{1}{4}[\sin(2a - 2c) + \sin 2c] - \frac{1}{4}[\sin 2b + \sin(2a - 2b)]$

$= \frac{1}{4}\sin 2(a - c) + \frac{1}{4}\sin 2c - \frac{1}{4}\sin 2b - \frac{1}{4}\sin 2(a - b)$

Tương tự:

$\sin b.\sin(c - a).\sin(c + a - b) = \frac{1}{4}\sin 2(b - a) + \frac{1}{4}\sin 2a - \frac{1}{4}\sin 2c - \frac{1}{4}\sin 2(b - c)$

$\sin c.\sin(a - b).\sin(a + b - c) = \frac{1}{4}\sin 2(c - b) + \frac{1}{4}\sin 2b - \frac{1}{4}\sin 2a - \frac{1}{4}\sin 2(c - a)$

Từ đó: $\sin a.\sin(b - c).\sin(b + c - a) + \sin b.\sin(c - a).\sin(c + a - b) + \sin c.\sin(a - b).\sin(a + b - c)$

$= [\frac{1}{4}\sin 2(a - c) + \frac{1}{4}\sin 2c - \frac{1}{4}\sin 2b - \frac{1}{4}\sin 2(a - b)] + [\frac{1}{4}\sin 2(b - a) + \frac{1}{4}\sin 2a - \frac{1}{4}\sin 2c - \frac{1}{4}\sin 2(b - c)] + [\frac{1}{4}\sin 2(c - b) + \frac{1}{4}\sin 2b - \frac{1}{4}\sin 2a - \frac{1}{4}\sin 2(c - a)]$

$$= \frac{1}{4}\sin2(a-c) - \frac{1}{4}\sin2(a-b) + \frac{1}{4}\sin2(b-a) - \frac{1}{4}\sin2(b-c)$$
$$+ \frac{1}{4}\sin2(c-b) - \frac{1}{4}\sin2(c-a)$$

$$= \frac{1}{4}\sin2(a-c) + \frac{1}{4}\sin2(b-a) + \frac{1}{4}\sin2(b-a) + \frac{1}{4}\sin2(c-b)$$
$$+ \frac{1}{4}\sin2(c-b) + \frac{1}{4}\sin2(a-c)$$

$$= \frac{1}{2}\sin2(a-c) + \frac{1}{2}\sin2(b-a) + \frac{1}{2}\sin2(c-b)$$

$$= \frac{1}{2}[\sin2(a-c) + \sin2(b-a)] + \frac{1}{2}\sin2(c-b)$$

$$= \sin(b-c)\cos(2a-c-b) + \sin(c-b)\cos(c-b)$$

$$= \sin(b-c)[\cos(2a-c-b) - \cos(c-b)] = -2\sin(b-c)\sin(a-b)\sin(a-c)$$

$$= 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

d) Làm tương tự câu a), ta có:

$$\cos a.\sin(b-c).\cos(b+c-a) + \cos b.\sin.(c-a).\cos(c+a-b)$$
$$+ \cos c.\sin(a-b).\cos(a+b-c) = 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

**Bài 5.** a) $\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x.$$

b) $\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x)$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}.\frac{1-\cos4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos4x.$$

c) $\sin^8x + \cos^8x = (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x.\cos^4x$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x \quad \text{(Theo kết quả ở câu a)}$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos4x + \frac{1}{16}\cos^2 4x - \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos4x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos4x + \frac{1}{16}\cos^2 4x - \frac{1}{32} + \frac{1}{16}\cos4x - \frac{1}{32}\cos^2 4x$$

$$= \frac{17}{32} + \frac{7}{16}\cos4x + \frac{1}{32}\cos^2 4x = \frac{17}{32} + \frac{7}{16}\cos4x + \frac{1}{32}.\frac{1+\cos8x}{2}$$

$$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos4x + \frac{1}{64}\cos8x.$$

c) $\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a-1}{\sin^6 a+\cos^6 a-1}=\dfrac{(\sin^2 a+\cos^2 a)^2-2\sin^2 a\cos^2 a-1}{(\sin^2 a+\cos^2 a)^3-3\sin^2 a\cos^2 a(\sin^2 a+\cos^2 a)-1}$

$$=\frac{-2\sin^2 a.\cos^2 a}{-3\sin^2 a.\cos^2 a}=\frac{2}{3}.$$

d) $\dfrac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\dfrac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]+\dfrac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b.\sin^2 c}-\cot^2 b\cot^2 c$

$=\dfrac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\dfrac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}\right]+\dfrac{\cot^2 b}{\sin^2 c}-\dfrac{1}{\sin^2 b}-\cot^2 b\cot^2 c$

$=\dfrac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}\right]+\cot^2 b(1+\cot^2 c)-(1+\cot^2 b)-\cot^2 b\cot^2 c$

$=\dfrac{1+\cos a}{2\sin a}.\dfrac{2\cos a}{1+\cos a}+\cot^2 b\cot^2 c+\cot^2 b-1-\cot^2 b-\cot^2 b\cot^2 c$

$=\cot a-1.$

e) Ta có: $\cot a-\cot b=\dfrac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$

Do đó: $\cot a-\cot 2a=\dfrac{\sin a}{\sin a.\sin 2a}=\dfrac{1}{\sin 2a}$

$\cot 2a-\cot 4a=\dfrac{\sin 2a}{\sin 2a.\sin 4a}=\dfrac{1}{\sin 4a}$

$\cot 4a-\cot 8a=\dfrac{\sin 4a}{\sin 4a.\sin 8a}=\dfrac{1}{\sin 8a}$

$\cot 8a-\cot 16a=\dfrac{\sin 8a}{\sin 8a.\sin 16a}=\dfrac{1}{\sin 16a}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin 2a}+\dfrac{1}{\sin 4a}+\dfrac{1}{\sin 8a}+\dfrac{1}{\sin 16a}=\cot a-\cot 16a.$

f) Ta có: $x-z=(x-y)+(y-z)$.

Khi đó: $-\tan(z-x)=\tan(x-z)=\tan[(x-y)+(y-z)]$

$$=\frac{\tan(x-y)+\tan(y-z)}{1-\tan(x-y).\tan(y-z)}$$

$\Rightarrow \tan(x-y)+\tan(y-z)=-\tan(z-x)+\tan(x-y).\tan(y-z).\tan(z-x)$

$\Rightarrow \tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y).\tan(y-z).\tan(z-x).$

**Bài 7.**

a) $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=\sin x+2\sin(x+\pi).\cos\dfrac{\pi}{3}$

$$=\sin x-\sin x=0$$

b) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x + 2\cos(x + \pi).\cos\frac{\pi}{3}$

$$= \cos x - \cos x = 0.$$

c) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2x) = \frac{3}{2}.$$

d) $\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2x) = \frac{3}{2}.$$

**Bài 8.**

a) $\sin 33^\circ + \cos 63^\circ = \sin 33^\circ + \sin 27^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 3^\circ = \cos 3^\circ.$

b) $\cos 20^\circ + 2\sin^2 55^\circ = \cos 20^\circ + 1 - \cos 110^\circ = 1 - 2\sin 65^\circ \sin(-45^\circ)$

$$= 1 + \sqrt{2}\sin 65^\circ.$$

c) $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$

$$= (\tan 9^\circ + \tan 81^\circ) - (\tan 63^\circ + \tan 27^\circ) = \frac{1}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{1}{\cos 63^\circ \cos 27^\circ}$$

$$\frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2\frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = 4.$$

d) $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3}\sin 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin 70^\circ - \cos 70^\circ}{\sqrt{3}\sin 70^\circ \cos 70^\circ}$

$$= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 70^\circ - \frac{1}{2}\cos 70^\circ\right)}{\sqrt{3}\sin 140^\circ} = \frac{4\left(\sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ\right)}{\sqrt{3}\sin 140^\circ}$$

$$= \frac{4\sin 40^\circ}{\sqrt{3}\sin(180^\circ - 40^\circ)} = \frac{4\sin 40^\circ}{\sqrt{3}\sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

e) $3\sin 15^\circ \cos 15^\circ + \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ}$

$$= \frac{3}{2}\sin 30^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ} = \frac{3}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\cos 30^\circ} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

f) $\tan\dfrac{\pi}{6} + \tan\dfrac{2\pi}{9} + \tan\dfrac{5\pi}{18} + \tan\dfrac{\pi}{3}$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{3}\right) + \left(\tan\frac{2\pi}{9} + \tan\frac{5\pi}{18}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}$$

$$= \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right)} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{\sin\frac{4\pi}{9}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{\cos\frac{\pi}{18}} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{18}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}} = \frac{4\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}} = \frac{8\cos\frac{\pi}{9}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{9}.$$

g) $\tan^2\dfrac{\pi}{12} + \tan^2\dfrac{3\pi}{12} + \tan^2\dfrac{5\pi}{12} = \tan^2\dfrac{\pi}{12} + \tan^2\dfrac{\pi}{4} + \cot^2\dfrac{\pi}{12}$

$$= 1 + \left(\tan^2\frac{\pi}{12} + \cot^2\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 + \left(\tan\frac{\pi}{12} + \cot\frac{\pi}{12}\right)^2 - 2 = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}\right)^2 - 1$$

$$= \left(\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)^2 - 1 = 16 - 1 = 15.$$

**Bài 9.**

a) $A = \cos 330^\circ + \sin 315^\circ + \cos 250^\circ + \sin 160^\circ$

$= \cos(-30^\circ + 360^\circ) + \sin(-45^\circ + 360^\circ) + \cos(180^\circ + 70^\circ) + \cos(90^\circ + 70^\circ)$

$= \cos 30^\circ - \sin 45^\circ - \cos 70^\circ + \cos 70^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$

b) $B = \cos 325^\circ + \sin 235^\circ + \tan 205^\circ.\tan 295^\circ$

$= \cos(-35^\circ + 360^\circ) + \sin(180^\circ + 55^\circ) + \tan(180^\circ + 25^\circ)\tan(-65^\circ + 360^\circ)$

$= \cos 35^\circ - \sin 55^\circ - \tan 25^\circ.\tan 65^\circ$

$= \cos 35^\circ - \sin(90^\circ - 35^\circ) - \tan 25^\circ.\tan(90^\circ - 25^\circ)$

$= \cos 35^\circ - \cos 35^\circ - \tan 25^\circ \cot 25^\circ = -1.$

c) $C = \dfrac{\sin 234^\circ + \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ}.\tan 36^\circ$

$= \dfrac{\sin(180^\circ + 54^\circ) + \cos(180^\circ + 36^\circ)}{\sin(180^\circ - 36^\circ) - \cos(90^\circ + 36^\circ)}.\tan 36^\circ$

$= \dfrac{-\sin 54^\circ - \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ + \sin 36^\circ}.\tan 36^\circ = \dfrac{-\sin(90^\circ - 36^\circ) - \cos 36^\circ}{2\sin 36^\circ}.\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}$

$= \dfrac{-2\cos 36^\circ}{2\cos 36^\circ} = -1.$

d) $D = \dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ.\cot 18^\circ$

$= \dfrac{\left[\cot 44^\circ + \tan(180^\circ + 46^\circ)\right]\cos(46^\circ + 360^\circ)}{\cos(-44^\circ + 360^\circ)} - \cot(90^\circ - 18^\circ).\cot 18^\circ$

$= \dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ)\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \tan 18^\circ.\cot 18^\circ$

$= \dfrac{\left[\cot(90^\circ - 46^\circ) + \tan 46^\circ\right]\cos 46^\circ}{\cos(90^\circ - 46^\circ)} - 1 = \dfrac{2\tan 46^\circ.\cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - 1$

$= \dfrac{2\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ} - 1 = 2 - 1 = 1.$

e) Ta có: $\cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ \Rightarrow \cos 10^\circ + \cos 170^\circ = 0$

Tương tự: $\cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0$, $\cos 30^\circ + \cos 150^\circ = 0$,

$\cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$, $\cos 50^\circ + \cos 130^\circ = 0$, $\cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0$,

$\cos 70^\circ + \cos 110^\circ = 0$, $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0$

Khi đó: $E = \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1.$

f) Ta có: $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$

$\Rightarrow \cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ = \cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ = \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ = 1$

Tương tự: $\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ = 1$, $\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$,

$\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$

$F = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + ... + \cos^2 80^\circ = 4.$

**Bài 10.**

a) $2^2A = 2^2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8} = 2.(2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}).\cos\frac{\pi}{8}$

$$= 2\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

b) $B = \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} =$

$$= \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24})(2\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

c) $C = \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$

$$= \sin\frac{\pi}{30}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{30}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{30}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{30}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{2\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2^5\cos\frac{\pi}{30}}.2^4\cos\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{2\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\cos\frac{8\pi}{30} = \dots$$

$$= \frac{1}{2^5\cos\frac{\pi}{30}}\sin\frac{16\pi}{30} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{30}\right)}{2^5\cos\frac{\pi}{30}} = \frac{\cos\frac{\pi}{30}}{2^5\cos\frac{\pi}{30}} = \frac{1}{32}.$$

d) $2^3\sin\frac{\pi}{9}.D = 2^3\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = 2^2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$

$$= 2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \sin\frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{\pi}{9} \Rightarrow D = \frac{1}{8}.$$

e) Theo kết quả ở bài tập 2 – Dạng 1:

$\cos x.\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \frac{1}{4}\cos 3x$

$E = \cos 10^\circ.\cos 20^\circ.\cos 30^\circ\dots\cos 80^\circ$

$= (\cos 10^\circ.\cos 50^\circ.\cos 70^\circ).(\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ).(\cos 30^\circ\cos 60^\circ)$

$= \cos^2 30^\circ.\cos^2 60^\circ = \frac{3}{16}.$

f) Tương tự e) sử dụng: $\sin x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4}\sin 3x$

$$F = \sin10^\circ.\sin20^\circ.\sin30^\circ...\sin80^\circ = \frac{3}{16}.$$

g) $G = \tan18^\circ.\tan36^\circ.\tan42^\circ.\tan78^\circ =$

$$= \tan18^\circ\tan(60^\circ - 18^\circ)\tan(60^\circ + 18^\circ).\tan36^\circ = \tan54^\circ.\cot36^\circ = 1.$$

h) Ta có:

$$H = \frac{H.\cos10^\circ}{\cos10^\circ} = \frac{1}{\cos10^\circ}.(2\cos10^\circ.\sin10^\circ)(8\sin30^\circ.\sin50^\circ.\sin70^\circ)$$

$$= \frac{1}{\cos10^\circ}.8\sin20^\circ.\frac{1}{2}.\cos40^\circ.\cos20^\circ = \frac{1}{\cos10^\circ}.2\sin40^\circ.\cos40^\circ$$

$$= \frac{\sin80^\circ}{\cos10^\circ} = \frac{\cos10^\circ}{\cos10^\circ} = 1.$$

i) $I = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$

Đặt $I_1 = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\left(\pi - \frac{8\pi}{15}\right)$

$$= -\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}.$$

$$I_2 = \cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}$$

Ta có: $2^4\sin\frac{\pi}{15}I_1 = -\sin\frac{16\pi}{15} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right) = \sin\frac{\pi}{15} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{16}$

$$2^2\sin\frac{3\pi}{15}I_2 = \sin\frac{12\pi}{15} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{15}\right) = \sin\frac{3\pi}{15} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}$$

Từ đó: $I = I_1.I_2.\cos\frac{5\pi}{15} = \frac{1}{16}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$.

**Bài 11.**

a) $2\sin\frac{2\pi}{11}A = 2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} + 2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} +$

$$+ 2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} + 2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}.$$

Ta có: $2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} = \sin\frac{3\pi}{11} + \sin\frac{\pi}{11}$

$$2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} = \sin\frac{5\pi}{11} - \sin\frac{\pi}{11}$$

$$2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = \sin\frac{7\pi}{11} - \sin\frac{3\pi}{11}$$

$$2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} = \sin\frac{9\pi}{11} - \sin\frac{5\pi}{11}$$

$$2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11} = \sin\pi - \sin\frac{7\pi}{11}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{2\pi}{11}A = \sin\pi + \sin\frac{9\pi}{11} \Rightarrow 2\sin\frac{2\pi}{11}A = \sin\frac{9\pi}{11}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{2\pi}{11}A = \sin\frac{2\pi}{11} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

b) $B = \cos\frac{9\pi}{11} - \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$

$$2\sin\frac{2\pi}{5}B = 2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$$

$$= (\sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}) + (\sin\pi - \sin\frac{\pi}{5}) = \sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

c) $C = \dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \dfrac{2\sin 15^\circ(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)}{2\sin 15^\circ(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)} = \dfrac{\sin 30^\circ + 2\sin^2 15^\circ}{\sin 30^\circ - 2\sin^2 15^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1-\cos 30^\circ}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

d) Ta có: $\sin\frac{7\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos\frac{\pi}{16}$;

$$\sin\frac{5\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}\right) = \cos\frac{3\pi}{16}.$$

Khi đó: $D = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$

$$= \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}$$

$$= (\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}) + (\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16})$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}) + (1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}) \quad (\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)$$

$= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8})$

$= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad (\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8})$.

e) $E = \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ - \cos^2 45^\circ$

$= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 40^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 80^\circ}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 20^\circ - (\cos 40^\circ + \cos 80^\circ)] = 1 + \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ)$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) = 1.$

f) $F = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ$

$= \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 2\cos 15^\circ(\cos 45^\circ + \cos 3^\circ)$

$= 2\cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 45^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 3^\circ = -2\cos 15^\circ \cos 45^\circ$

$= -(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$

g) $G = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 100^\circ) + \frac{1}{2}(1 - \cos 140^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)$

$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + 140^\circ) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ)$

$= 1 - \cos 120^\circ \cos 20^\circ + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^\circ = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 20^\circ = \frac{5}{4}.$

h) Ta có: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ \Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2\cos^2 36^\circ - 1$

$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 2\sin^2 18^\circ)^2 - 1 \Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2 - 8\sin^2 18^\circ + 8\sin^4 18^\circ - 1$

$\Leftrightarrow 8\sin^4 18^\circ - 8\sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ - 1 = 0$ (vì $0 < \sin 18^\circ < 1$)

$\Leftrightarrow 8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1.$

i) Ta có: $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan(20^\circ + 40^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 40^\circ}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ$

$\Rightarrow \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}.$

**Bài 12.**

a) $A = 2\cos^4x - \sin^4x + \sin^2x\cos^2x + 3\sin^2x$

$= (\cos^4x - \sin^4x) + \cos^2x(\cos^2x + \sin^2x) + 3\sin^2x$

$= \cos^2x - \sin^2x + \cos^2x + 3\sin^2x = 2(\cos^2x + \sin^2x) = 2.$

b) $B = \dfrac{2}{\tan x - 1} + \dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{2\cos x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

$= \dfrac{2\cos x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = -1.$

c) $C = \sin^4x(1 + \sin^2x) + \cos^4x(1 + \cos^2x) + 5\sin^2x\cos^2x + 1$

$= \sin^4x + 2\sin^2x\cos^2x + \cos^4x + \sin^6x + \cos^6x$

$+ 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x) + 1$

$= (\sin^2x + \cos^2x)^2 + (\sin^3x + \cos^3x)^2 + 1 = 3.$

d) $D = 3(\sin^8x - \cos^8x) + 4(\cos^6x - 2\sin^6x) + 6\sin^4x$

$= 3(\sin^2x - \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x) + 4\cos^6x - 8\sin^6x + 6\sin^4x$

$= \cos^6x - 5\sin^6x + 3\sin^2x\cos^4x - 3\cos^2x\sin^4x + 6\sin^4x$

$= \cos^6x + \sin^6x + 3\sin^2x\cos^4x - 3\cos^2x\sin^4x + 6\sin^4x(1 - \sin^2x)$

$= \cos^6x + \sin^6x + 3\sin^2x\cos^4x - 3\cos^2x\sin^4x + 6\sin^4x\cos^2x$

$= \cos^6x + \sin^6x + 3\sin^2x\cos^4x + 3\cos^2x\sin^4x = (\cos^2x + \sin^2x)^3 = 1.$

e) $E = \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)\sin(a - b)$

$= \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - \cos(x - a)[\cos(x - a) - \cos(x + a - 2b)]$

$= \sin^2(x - b) + \cos(x - a)\cos(x + a - 2b)$

$= \dfrac{1}{2}[1 - \cos 2(x - b)] + \dfrac{1}{2}[\cos 2(x - b) + \cos 2(b - a)]$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2(b - a) = \cos^2(b - a).$

f) $F = \sqrt{\sin^4x + 4\cos^2x} + \sqrt{\cos^4x + 4\sin^2x}$

$= \sqrt{\sin^4x + 4(1 - \sin^2x)} + \sqrt{\cos^4x + 4(1 - \cos^2x)}$

$= \sqrt{\sin^4x - 4\sin^2x + 4} + \sqrt{\cos^4x - 4\cos^2x + 4}$

$= \sqrt{(2 - \sin^2x)^2} + \sqrt{(2 - \cos^2x)^2} = (2 - \sin^2x) + (2 - \cos^2x) = 3.$

g) $G = \sin x\sqrt{1 + \cos x\sqrt{1 - \sin^2x}} + \cos x\sqrt{1 + \sin x\sqrt{1 - \cos^2x}}$

$= \sin x\sqrt{1 + \cos x\sqrt{\cos^2x}} + \cos x\sqrt{1 + \sin x\sqrt{\sin^2x}}$

$= \sin x\sqrt{1 - \cos^2x} + \cos x\sqrt{1 - \sin^2x}$ (Vì $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$)

$= \sin x\sqrt{\sin^2x} + \cos x\sqrt{\cos^2x} = -\sin^2x - \cos^2x = -1.$

**Bài 13.**

a) $$A = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y\cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z\cos x}$$

$$= \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y} + \frac{\sin y\cos z - \sin z\cos y}{\cos y\cos z} + \frac{\sin z\cos x - \sin x\cos z}{\cos z\cos x}$$

$$= \tan x - \tan y + \tan y - \tan z + \tan z - \tan x = 0.$$

b) Ta có:

$$\sin x\sin(y-z)\cos(y+z-x) = \frac{1}{2}\sin x[\sin(2y-x) + \sin(x-2z)]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\sin(2y-x) + \frac{1}{2}\sin x\sin(x-2z)$$

$$= \frac{1}{4}[\cos2(x-y) - \cos2y] + \frac{1}{4}[\cos2z - \cos2(x-z)]$$

$$= \frac{1}{4}\cos2(x-y) - \frac{1}{4}\cos2y + \frac{1}{4}\cos2z - \frac{1}{4}\cos2(x-z).$$

Tương tự:

$$\sin y\sin(z-x)\cos(z+x-y) = \frac{1}{4}\cos2(y-z) - \frac{1}{4}\cos2z + \frac{1}{4}\cos2x - \frac{1}{4}\cos2(y-x)$$

$$\sin z\sin(x-y)\cos(x+y-z) = \frac{1}{4}\cos2(z-x) - \frac{1}{4}\cos2x + \frac{1}{4}\cos2y - \frac{1}{4}\cos2(z-y)$$

Suy ra: B = 0.

c) Làm tương tự b) ta có C = 0.

d) $$D = \cos(x+y)\sin(x-y) + \cos(y+z)\sin(y-z) + \cos(z+t)\sin(z-t) + \cos(t+x)\sin(t-x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin2x - \sin2y) + \frac{1}{2}(\sin2y - \sin2z) + \frac{1}{2}(\sin2z - \sin2t) + \frac{1}{2}(\sin2t - \sin2x) = 0$$

e) $$\sin(x+y)\sin(x-y)\sin(z+t)\sin(z-t) + \sin(z+y)\sin(z-y)\sin(t+x)\sin(t-x) + {} + \sin(t+y)\sin(t-y)\sin(x+z)\sin(x-z)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2y - \cos 2x)(\sin 2t - \sin 2z) + \frac{1}{4}(\cos 2y - \cos 2z)(\sin 2x - \sin 2t)$$

$$+ \frac{1}{4}(\cos 2y - \cos 2t)(\sin 2z - \sin 2x) = \ldots = 0.$$

f) $F = \dfrac{\sin x}{\sin(x-y)\sin(x-z)} + \dfrac{\sin y}{\sin(y-x)\sin(y-z)} + \dfrac{\sin z}{\sin(z-x)\sin(z-y)}$

$$= \frac{\sin x}{\sin(x-y)\sin(x-z)} - \frac{\sin y}{\sin(x-y)\sin(y-z)} + \frac{\sin z}{\sin(x-z)\sin(y-z)}$$

$$= \frac{\sin x\sin(y-z) - \sin y\sin(x-z) + \sin z\sin(x-y)}{\sin(x-y)\sin(x-z)\sin(y-z)}$$

Ta có: $\sin x\sin(y-z) - \sin y\sin(x-z) + \sin z\sin(x-y)$

$$= \frac{1}{2}[\cos(x-y+z) - \cos(x+y-z)] - \frac{1}{2}[\cos(y-x+z) - \cos(x+y-z)]$$

$$+ \frac{1}{2}[\cos(z-x+y) - \cos(z+x-y)] = \ldots = 0.$$

Vậy $F = 0$.

g) Làm tương tự f) ta được $G = 0$.

**Bài 14.**

a) $A = \cos 2x - a\sin^2 x + 3\cos^2 x$

$$= \cos 2x - \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{3}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{5+a}{2}\cos 2x + \frac{3-a}{2}$$

Để A không phụ thuộc x thì $\dfrac{5+a}{2} = 0 \Rightarrow a = -5$.

b) $B = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$

$$= 2\sin\frac{2x+3a}{2}\cos\frac{3a}{2} + 2\sin\frac{2x+3a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$= 2\sin\frac{2x+3a}{2}\left(\cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)$$

Để B không phụ thuộc x thì $\cos\dfrac{3a}{2} + \cos\dfrac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos a\cos\dfrac{a}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos a = 0 \\ \cos\frac{a}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a = \pi + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $C = a(2a\sin x - 1) - 4(a^2 - 1)\sin x\sin^2\dfrac{x}{2} + 2(a + 1)\cos^2 x - 2\sin x$

$= 2a^2\sin x - a - 4(a^2 - 1)\sin x\dfrac{1-\cos x}{2} + 2(a + 1)\dfrac{1+\cos 2x}{2} - 2\sin x$

$= 2a^2\sin x - a - 2(a^2 - 1)\sin x + (a^2 - 1)\sin 2x + a + 1 + (a + 1)\cos 2x - 2\sin x$

$= (a^2 - 1)\sin 2x + (a + 1)\cos 2x + 1.$

Để C không phụ thuộc vào x thì $\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$

**Bài 15.** $M = p(\sin^6 x + \cos^6 x) - q(\sin^4 x + \cos^4 x)$

$= p(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x) - q(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x) = p - q + (\dfrac{q}{2} - \dfrac{3p}{4})\sin^2 2x$

Để M không phụ thuộc vào x thì $\dfrac{q}{2} - \dfrac{3p}{4} = 0 \Leftrightarrow 3p = 2q$.

**Bài 16.** Ta có: $\cos(a + b) = 0 \Leftrightarrow a + b = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Từ đó: $a + 2b = 2(a + b) - a = \pi - a + k2\pi$

$\Rightarrow \sin(a + 2b) = \sin(\pi - a + k2\pi) = \sin a.$

**Bài 17.** Ta có: $\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{180^\circ - a}{2} = 90^\circ - \dfrac{a}{2} = 90^\circ - b;$

$\dfrac{c-b}{2} = \dfrac{c+b}{2} - b = 90^\circ - 2b = 90^\circ - a$

Từ đó: $\sin b(\sin b + \sin c) = 2\sin b\sin\dfrac{b+c}{2}\cos\dfrac{c-b}{2}$

$= 2\sin b\sin(90^\circ - b)\cos(90^\circ - a) = 2\sin b\cos b\sin a = \sin 2b\sin a = \sin^2 a.$

**Bài 18.** Ta có: $3\sin b = \sin(2a + b)$

$\Leftrightarrow 3\sin[(a + b) - a] = \sin[(a + b) + a]$

$\Leftrightarrow 3\sin(a + b)\cos a - 3\cos(a + b)\sin a = \sin(a + b)\cos a + \cos(a + b)\sin a$

$\Leftrightarrow 2\sin(a + b)\cos a = 4\cos(a + b)\sin a \Leftrightarrow \tan(a + b) = 2\tan a.$

**Bài 19.** Ta có: $A\sin(a + b) = \sin a \Leftrightarrow A\sin(a + b) = \sin[(a + b) - b]$

$\Leftrightarrow A\sin(a + b) = \sin(a + b)\cos b - \cos(a + b)\sin b$

$\Leftrightarrow \cos(a + b)\sin b = \sin(a + b)(\cos b - A) \Leftrightarrow \tan(a + b) = \dfrac{\sin b}{\cos b - A}.$

**Bài 20.** Ta có: $\dfrac{aA + bB}{aB + bA} = \dfrac{\dfrac{a}{b}.\dfrac{A}{B} + 1}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{A}{B}} = \dfrac{\dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x-z)}.\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x-z)} + 1}{\dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x-z)} + \dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x-z)}}$

$$=\frac{\dfrac{\sin(x-y)\cos(x-y)+\sin(x-z)\cos(x-z)}{\sin(x-z)\cos(x-z)}}{\dfrac{\sin(x-y)\cos(x-z)+\cos(x-y)\sin(x-z)}{\sin(x-z)\cos(x-z)}}=\frac{\sin 2(x-y)+\sin 2(x-z)}{2\sin(2x-y-z)}$$

$$=\frac{\sin(2x-y-z)\cos(z-y)}{\sin(2x-y-z)}=\cos(y-z).$$

**Bài 21.** Ta có:

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)}{a+b}=\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{a+b}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)\sin^4 x-\frac{2}{a+b}\sin^2 x\cos^2 x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)\cos^4 x=0$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a(a+b)}\sin^4 x-\frac{2}{a+b}\sin^2 x\cos^2 x+\frac{a}{b(a+b)}\cos^4 x=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{ab(a+b)}\left(b^2\sin^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x+a^2\cos^4 x\right)=0$$

$$\Rightarrow b^2\sin^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x+a^2\cos^4 x=0\Rightarrow(b\sin^2 x-a\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow b\sin^2 x=a\cos^2 x\Rightarrow\frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}.$$

Khi đó: $\dfrac{\sin^2 x}{a}=\dfrac{\cos^2 x}{b}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{a}{a+b}\\ \cos^2 x=\dfrac{b}{a+b}\end{cases}$

Vậy: $\dfrac{\sin^8 x}{a^3}+\dfrac{\cos^8 x}{b^3}=\dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^4+\dfrac{1}{b^3}\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^4=\dfrac{a}{(a+b)^4}+\dfrac{b}{(a+b)^4}=\dfrac{1}{(a+b)^3}.$

**Bài 22.** Ta có: $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+2\alpha)}{c}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{b}\Rightarrow\dfrac{\cos x+\cos(x+2\alpha)}{a+c}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{b}$

$$\Rightarrow\frac{a+c}{b}=\frac{\cos x+\cos(x+2\alpha)}{\cos(x+\alpha)}=\frac{2\cos(x+\alpha)\cos\alpha}{\cos(x+\alpha)}=2\cos\alpha$$

Tương tự: $\dfrac{b+d}{c}=\dfrac{\cos(x+\alpha)+\cos(x+3\alpha)}{\cos(x+2\alpha)}=2\cos\alpha$

Vậy: $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$

**Bài 23.** Ta có: $\frac{a}{\tan(\alpha+A)}=\frac{b}{\tan(\alpha+B)}=\frac{a+b}{\tan(\alpha+A)+\tan(\alpha+B)}$

$$=\frac{(a+b)\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\sin(2\alpha+A+B)}$$

$$\frac{a}{\tan(\alpha+A)}=\frac{b}{\tan(\alpha+B)}=\frac{a-b}{\tan(\alpha+A)-\tan(\alpha+B)}$$

$$=\frac{(a-b)\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\sin(A-B)}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\sin(2\alpha+A+B)}=\frac{(a-b)\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\sin(A-B)}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin(2\alpha+A+B)}{\sin(A-B)}$$

Từ đó: $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(A-B)=\sin(2\alpha+A+B)\sin(A-B)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2B)-\cos(2\alpha+2A)]$$

Tương tự:

$$\frac{b+c}{b-c}\sin^2(B-C)=\sin(2\alpha+B+C)\sin(B-C)=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2C)-\cos(2\alpha+2B)]$$

$$\frac{c+a}{c-a}\sin^2(C-A)=\sin(2\alpha+C+A)\sin(C-A)=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2A)-\cos(2\alpha+2C)]$$

Vậy: $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(A-B)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(B-C)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(C-A)=0$.

**Bài 24.** Đặt: $a=\sin^2A$, $b=\sin^2B$, $c=\sin^2C$.

Ta có: $\tan^2A\tan^2B+\tan^2B\tan^2C+\tan^2C\tan^2A+2\tan^2A\tan^2B\tan^2C=1$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(1-a)(1-b)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{ca}{(1-c)(1-a)}+\frac{2abc}{(1-a)(1-b)(1-c)}=1$$

$\Leftrightarrow ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b)+2abc=(1-a)(1-b)(1-c)$

$\Leftrightarrow ab-abc+bc-abc+ca-abc+2abc=1-a-b-c+ab+ac+bc-abc$

$\Leftrightarrow a+b+c=1$.

**Bài 25.**

a) Ta có: $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow \dfrac{1}{4\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{4\sin^2 x}$

Từ đó: $\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{a}{2}}=\dfrac{1}{\sin^2 a}-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{a}{2}}$; $\dfrac{1}{4^2\cos^2\dfrac{a}{2^2}}=\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{a}{2}}-\dfrac{1}{4^2\sin^2\dfrac{a}{2^2}}$;

$\dfrac{1}{4^3\cos^2\dfrac{a}{2^3}}=\dfrac{1}{4^2\sin^2\dfrac{a}{2^2}}-\dfrac{1}{4^3\sin^2\dfrac{a}{2^3}}$;

...; $\dfrac{1}{4^n\cos^2\dfrac{a}{2^n}}=\dfrac{1}{4^{n-1}\sin^2\dfrac{a}{2^{n-1}}}-\dfrac{1}{4^n\sin^2\dfrac{a}{2^n}}$

Khi đó: $A=\dfrac{1}{\sin^2 a}-\dfrac{1}{4^n\sin^2\dfrac{a}{2^n}}$.

b) Ta có: $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$

$= 2\sin x\cos^2 x + \cos 2x\sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$

Từ đó: $\sin^3\dfrac{a}{3}=\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{4}\sin a$;

$3\sin^3\dfrac{a}{3^2}=3(\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{a}{3^2}-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{a}{3})=\dfrac{3^2}{4}\sin\dfrac{a}{3^2}-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{a}{3}$

$3^2\sin^3\dfrac{a}{3^3}=\dfrac{3^3}{4}\sin\dfrac{a}{3^3}-\dfrac{3^2}{4}\sin\dfrac{a}{3^2}$;...; $3^{n-1}\sin^3\dfrac{a}{3^n}=\dfrac{3^n}{4}\sin\dfrac{a}{3^n}-\dfrac{3^{n-1}}{4}\sin\dfrac{a}{3^{n-1}}$

Khi đó: $B=\dfrac{3^n}{4}\sin\dfrac{a}{3^n}-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{a}{3}$.

c) Ta có: $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \ln(\sin 2x) = \ln 2 + \ln(\sin x) + \ln(\cos x)$

$\Rightarrow \ln(\cos x) = \ln(\sin 2x) - \ln(\sin x) - \ln 2$

Từ đó: $\ln(\cos\dfrac{a}{2}) = \ln(\sin a) - \ln(\sin\dfrac{a}{2}) - \ln 2$

$$\ln(\cos\frac{a}{2^2}) = \ln(\sin\frac{a}{2}) - \ln(\sin\frac{a}{2^2}) - \ln 2$$

$$\ln(\cos\frac{a}{2^3}) = \ln(\sin\frac{a}{2^2}) - \ln(\sin\frac{a}{2^3}) - \ln 2$$

...

$$\ln(\cos\frac{a}{2^n}) = \ln(\sin\frac{a}{2^{n-1}}) - \ln(\sin\frac{a}{2^n}) - \ln 2$$

Khi đó: $C = \ln(\sin a) - \ln(\sin\frac{a}{2^n}) - n.\ln 2 = \ln\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}$.

d) Ta có: $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin x} = \frac{\sin(x-\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\sin x} = \frac{\sin x\cos\frac{x}{2} - \cos x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x$

Từ đó: $\frac{1}{\sin a} = \cot\frac{a}{2} - \cot a$ ; $\frac{1}{\sin 2a} = \cot a - \cot 2a$ ;

$\frac{1}{\sin 2^2 a} = \cot 2a - \cot 2^2 a$ ; ...; $\frac{1}{\sin 2^n a} = \cot 2^{n-1}a - \cot 2^n a$ .

Khi đó: $D = \cot\frac{a}{2} - \cot 2^n a$ .

e) Ta có: $\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x} = \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x} = \frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow \tan x = \cot x - 2\cot 2x$

Từ đó: $\tan a = \cot a - 2\cot 2a$; $\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2} - \cot a$ ;

$\frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{a}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}$ ;...; $\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{a}{2^{n-1}}$

Khi đó: $E = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$ .

**Bài 26.**

a) Nếu $d = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $A = (n+1)\sin a$

Nếu $d \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow \sin\frac{d}{2} \neq 0$ thì:

$$2\sin\frac{d}{2}A = 2\sin\frac{d}{2}\sin a + 2\sin\frac{d}{2}\sin(a+d) + 2\sin\frac{d}{2}\sin(a+2d)$$

$$+ \ldots + 2\sin\frac{d}{2}\sin(a+nd)$$

$$= \left[\cos(a-\frac{d}{2})-\cos(a+\frac{d}{2})\right]+\left[\cos(a+\frac{d}{2})-\cos(a+\frac{3d}{2})\right]$$

$$+\left[\cos(a+\frac{3d}{2})-\cos(a+\frac{5d}{2})\right]+...+\left[\cos(a+\frac{(2n-1)d}{2})-\cos(a+\frac{(2n+1)d}{2})\right]$$

$$=\cos(a-\frac{d}{2})-\cos\left(a+\frac{(2n+1)d}{2}\right) = 2\sin\left(a+\frac{nd}{2}\right)\sin\frac{(n+1)d}{2}$$

Vậy $A = \dfrac{\sin\left(a+\frac{nd}{2}\right)\sin\frac{(n+1)d}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$.

b) Nếu $d = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = (n + 1)\cos a$

Nếu $d \neq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \sin\frac{d}{2} \neq 0$ thì:

$$2\sin\frac{d}{2}A = 2\sin\frac{d}{2}\cos a + 2\sin\frac{d}{2}\cos(a+d) + 2\sin\frac{d}{2}\cos(a+2d)$$

$$+...+ 2\sin\frac{d}{2}\cos(a+nd)$$

$$=\left[\sin(a+\frac{d}{2})-\sin(a-\frac{d}{2})\right]+\left[\sin(a+\frac{3d}{2})-\sin(a+\frac{d}{2})\right]$$

$$+\left[\sin(a+\frac{5d}{2})-\sin(a+\frac{3d}{2})\right]+...+\left[\sin(a+\frac{(2n+1)d}{2})-\sin(a+\frac{(2n-1)d}{2})\right]$$

$$= \sin\left(a+\frac{(2n+1)d}{2}\right)-\sin(a-\frac{d}{2}) = 2\cos\left(a+\frac{nd}{2}\right)\sin\frac{(n+1)d}{2}$$

Vậy $B = \dfrac{\cos\left(a+\frac{nd}{2}\right)\sin\frac{(n+1)d}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$.

c) $C = \frac{1}{2}[(1 + \cos 2b) + (1 + \cos 2(b + h)) + (1 + \cos 2(b + 2h))$

$+...+ (1 + \cos 2(b + nh))] = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2b + \cos(2b + 2h) + \cos(2b + 4h)$

$+...+ \cos(2b + 2nh)]$

Áp dụng kết quả câu b) với $a = 2b$, $d = 2h$ ta có:

$$C = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos(2b+nh)\sin(n+1)h}{\sinh}$$

d) Ta có: $D = n - C = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(2b+nh)\sin(n+1)h}{\sinh}$

e) $E = \frac{1}{\sin b}[\sin b + \sin 3b + \sin 5b + ... + \sin(2n-1)b]$

Áp dụng kết quả câu a) với a = b, d = 2b ta có:

$$E = \frac{1}{\sin b}\frac{\sin^2 nb}{\sin b} = \frac{\sin^2 nb}{\sin^2 b}.$$

f) Ta có: $\tan(x+d) - \tan x = \frac{\sin d}{\cos(x+d)\cos x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(x+d)\cos x} = \frac{\tan(x+d) - \tan x}{\sin d}$$

Từ đó: $\frac{1}{\cos a\cos(a+d)} = \frac{\tan(a+d) - \tan a}{\sin d}$;

$$\frac{1}{\cos(a+d)\cos(a+2d)} = \frac{\tan(a+2d) - \tan(a+d)}{\sin d};...$$

$$...;\ \frac{1}{\cos[a+(n-1)d]\cos(a+nd)} = \frac{\tan(a+nd) - \tan[a+(n-1)d]}{\sin d}$$

Khi đó: $F = \frac{\tan(a+nd) - \tan a}{\sin d} = \frac{\sin nd}{\sin d.\cos(a+nd).\cos a}$

g) $\tan(k+1)x - \tan kx = \frac{\sin x}{\cos(k+1)x\cos kx} = \frac{2\sin x}{\cos x + \cos(2k+1)x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x + \cos(2k+1)x} = \frac{1}{\sin x}[\tan(k+1)x - \tan kx]$$

Từ đó: $\frac{1}{\cos a + \cos 3a} = \frac{1}{\sin a}(\tan 2a - \tan a)$;

$$\frac{1}{\cos a + \cos 5a} = \frac{1}{\sin a}(\tan 3a - \tan 2a);...$$

$$...;\ \frac{1}{\cos a + \cos(2n+1)a} = \frac{1}{\sin a}[\tan(n+1)a - \tan na]$$

Khi đó: $G = \frac{\tan(n+1)a - \tan na}{\sin a} = \frac{\sin na}{\sin a\cos a\cos(n+1)a} = \frac{2\sin na}{\sin 2a\cos(n+1)a}$.

**Bài 27.** Tính các tích sau:

a) Ta có: $2\sin a\cos a = \sin 2a$

$$2^2\sin a\cos a\cos 2a = 2\sin 2a\cos 2a = \sin 2^2a$$

$$2^3\sin a\cos a\cos 2a\cos 2^2a = 2\sin 4a\cos 4a = \sin 2^3a$$

Bằng quy nạp theo n, ta có:

$$2^{n+1}\sin aA = 2^n\sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 2^2a...\cos 2^na = \sin 2^{n+1}a$$

Vậy $A = \dfrac{\sin 2^{n+1}a}{2^{n+1}\sin a}$.

b) Ta có: $(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 4\cos^2x - 1 = 2(1 + \cos 2x) - 1$

$= 2\cos 2x + 1 \Rightarrow 2\cos x - 1 = \dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos x + 1}\ \left(x \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})\right)$

Khi đó: với $a \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$, ta có:

$$B = \frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1}.\frac{2\cos 2^2a + 1}{2\cos 2a + 1}.\frac{2\cos 2^3a + 1}{2\cos 2^2a + 1}...\frac{2\cos 2^{n+1}a + 1}{2\cos 2^na + 1} = \frac{2\cos 2^{n+1}a + 1}{2\cos a + 1}$$

Khi $a = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$ thì $B = 0$.

c) Ta có: $\cos x - \cos y = \left(2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1\right) - \left(2\cos^2\dfrac{y}{2} - 1\right)$

$= 2\left(\cos^2\dfrac{x}{2} - \cos^2\dfrac{y}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2}\right)\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{y}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\cos x - \cos y}{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{y}{2}}$.

Từ đó:

$$C = \frac{1}{2}.\frac{\cos a - \cos b}{\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b}{2}}.\frac{1}{2}.\frac{\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2^2} - \cos\frac{b}{2^2}}.\frac{1}{2}.\frac{\cos\frac{a}{2^2} - \cos\frac{b}{2^2}}{\cos\frac{a}{2^3} - \cos\frac{b}{2^3}}...\frac{1}{2}.\frac{\cos\frac{a}{2^{n-1}} - \cos\frac{b}{2^{n-1}}}{\cos\frac{a}{2^n} - \cos\frac{b}{2^n}}$$

$$= \frac{\cos a - \cos b}{2^n\left(\cos\frac{a}{2^n} - \cos\frac{b}{2^n}\right)}.$$

$\Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

** Các trường hợp đặc biệt*

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

**** Chú ý:***

*• Công thức nghiệm của phương trình (2) có thể viết lại*
$\cos x = m\left(|m| \le 1\right) \Leftrightarrow x = \pm\arccos m + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\left(\arccos m \in [0;\pi] \text{ sao cho } \cos x = m\right)$

*• Đối với các dạng phương trình* $\cos u(x) = m$; $\cos u(x) = \cos v(x)$ *(Với* $u(x)$; $v(x)$ *là các biểu thức chứa biến x) ta sử dụng công thức nghiệm tương tự*

### 3. Phương trình tanx = m. (3)

** Điều kiện có nghiệm* $m \in \mathbb{R}$

** Điều kiện của phương trình:* $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

** Công thức nghiệm* $\forall m \in \mathbb{R}$ *ta có* $\exists\alpha$ *sao cho* $\tan\alpha = m$

*Khi đó (3)* $\Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**** Chú ý:***

*• Công thức nghiệm của phương trình (3) có thể viết lại*
$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\arctan m \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ sao cho } \tan x = m\right)$$

*• Đối với các dạng phương trình* $\tan u(x) = m$; *(Điều kiện* $\cos u(x) \ne 0$*)* $\tan u(x) = \tan v(x)$ *(Điều kiện* $\cos u(x) \ne 0$; $\cos v(x) \ne 0$*) ta sử dụng công thức nghiệm tương tự*

### 4. Phương trình cotx = m. (4)

** Điều kiện có nghiệm* $m \in \mathbb{R}$

** Điều kiện của phương trình:* $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

** Công thức nghiệm* $\forall m \in \mathbb{R}$ *ta có* $\exists\alpha$ *sao cho* $\cot\alpha = m$

*Khi đó (4)* $\Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

> ***Chú ý:***
>
> - *Công thức nghiệm của phương trình (4) có thể viết lại* $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\left(\operatorname{arccot} m \in [0;\pi] \text{ sao cho } \cot x = m\right)$
> - *Đối với các dạng phương trình* $\cot u(x) = m$; *(Điều kiện* $\sin u(x) \neq 0$*)* $\cot u(x) = \cot v(x)$ *(Điều kiện* $\sin u(x) \neq 0;\ v(x) \neq 0$*) ta sử dụng công thức nghiệm tương tự*

## B. BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ b) $3\sin 2x - 1 = 0$

c) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0.$

**Giải**

a) Ta có $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $3\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{4} = 2x + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin x \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\dfrac{\pi}{3}=-x+k2\pi \\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=\pi+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

**Bài 2.** Giải các phương trình

a) $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0$

c) $\cos(3x+20^0)=\cos(40^0-x)$ d) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x.$

## Giải

a) $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=-\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{-3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi \\ x=-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\cos\left(3x+20^0\right)=\cos\left(40^0-x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+20^0=40^0-x+k360^0 \\ 3x+20^0=x-40^0+k360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=20^0+k360^0 \\ 2x=-60^0+k360^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5^0+k90^0 \\ x=-30^0+k180^0 \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

d) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ 3x+\dfrac{\pi}{3}=2x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{k2\pi}{5} \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 3.** Giải các phương trình:

a) $\tan\left(x+60^0\right)=-\sqrt{3}$ b) $4\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1=0$

c) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

**Giải**

a) $\tan\left(x+60^0\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan\left(x+60^0\right)=-\tan 60^0$

$\Leftrightarrow\tan\left(x+60^0\right)=\tan\left(-60^0\right)\Leftrightarrow x+60^0=-60^0+k180^0$

$\Leftrightarrow x=-120^0+k180^0, k\in\mathbb{Z}$.

b) $4\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1=0\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-x=\operatorname{arc}\tan\frac{1}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc}\tan\frac{1}{4}-k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc}\tan\frac{1}{4}+m\pi, m\in\mathbb{Z}$.

c) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-3x+k\pi$

$\Leftrightarrow 5x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{30}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$.

d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

$\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}-2x+k\pi$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 4.** Giải các phương trình

a) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{3}$ b) $\cos x=\sqrt{3}\sin x$

c) $\cot 3x+\cot\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=0$ d) $\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

**Giải**

a) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}+x=\operatorname{arc}\cot\frac{1}{3}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+\operatorname{arc}\cot\frac{1}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) $\cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3}$ (Vì $\sin x \neq 0$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cot 3x + \cot\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \cot 3x = -\cot\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$

$\Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 3x = x - \frac{\pi}{5} + k\pi$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 5.** Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ b) $4\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$

c) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1$.

**Giải**

a) $$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét: Ngoài cách giải trên, đối với các phương trình có dạng $\sin^2 x = m$ hoặc $\cos^2 x = m$ hoặc $\sin^{2n} x = m$ hoặc $\cos^{2n} x = m$ thì ta có thể sử dụng công thức hạ bậc để qui về một phương trình cơ bản và giải.

Chẳng hạn: $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $4\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left[1 + \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)\right] - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 6x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 6.** Giải các phương trình

a) $\sin(\pi \sin 2x) = 1$ b) $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\left[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)\right] = 1.$

**Giải**

a) Ta có $\sin(\pi \sin 2x) = 1\ (1) \Leftrightarrow \pi \sin 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Vì $|\sin 2x| \le 1$ nên $\left|\frac{1}{2} + 2k\right| \le 1$

Suy ra $-\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 12\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 12\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + l\pi \end{array}\right. (l \in \mathbb{Z}).$

b) $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ \frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+4k\,(3)\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+4k\,(4)\end{array}\right.$$

Ta có $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$ nên $\left|\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Rightarrow -\frac{3}{8}\le k\le\frac{1}{8}$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$

Suy ra (3) $\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+l2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+l2\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+l2\pi\end{array}\right.,l\in\mathbb{Z}.$

Tương tự $\left|-\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le k\le\frac{3}{4}$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$. Do đó

$(4)\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+m2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{12}+m2\pi\\ x=-\frac{5\pi}{12}+m2\pi\end{array}\right.(m\in\mathbb{Z}).$$

c) $\tan\left[\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)\right]=1$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow\cos x+\sin x=1+4k$

Vì $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ nên $|\cos x+\sin x|\le\sqrt{2}$

Suy ra $|1+4k|\le\sqrt{2}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4}\le k\le\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$

Khi đó: $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+l\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+l2\pi \\ x=l2\pi \end{array}\right. (l \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 7.** Giải và biện luận phương trình

a) $3\cos 2x+1=m^2$ (1) b) $(m+1)\sin 3x+1-m^2=0$ (2).

**Giải**

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow 3\cos 2x=m^2-1 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{m^2-1}{3}$

Nếu $-1 \le \frac{m^2-1}{3} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m^2-1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$

Khi đó phương trình $\cos 2x=\frac{m^2-1}{3} \Leftrightarrow 2x=\pm\arccos\frac{m^2-1}{3}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{m^2-1}{3}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nếu $\left[\begin{array}{l} \frac{m^2-1}{3}<-1 \\ \frac{m^2-1}{3}>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-1<-3 \\ m^2-1>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2<-2 \\ m^2>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm.

b) + Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ phương trình (2) trở thành $0\sin 3x=0$, phương trình (2) có vô số nghiệm

+ Nếu $m+1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$, phương trình (2) trở thành

$\sin 3x=\frac{m^2-1}{m+1} \Leftrightarrow \sin 3x=m-1$

- Nếu $|m-1| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$ thì phương trình (2) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} 3x=\arcsin(m-1)+k2\pi \\ 3x=\pi-\arcsin(m-1)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}\arcsin(m-1)+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\arcsin(m-1)+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu $|m-1|>1 \Rightarrow 1 \ne m<0$ hoặc $m>2$

Khi đó phương trình đã cho vô nghiệm.

**Bài 8.** Giải các phương trình

a) $\cos 2x.\cos 5x=\cos 7x$ b) $\sin 4x.\sin 3x=\cos x$

c) $\cos x.\cos 3x=\cos 5x.\cos 7x$ c) $\sin 3x.\cos 7x=\sin 13x.\cos 17x$.

**Giải**

a) $\cos 2x.\cos 5x = \cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x) = \cos 7x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x = \frac{1}{2}\cos 3x \Leftrightarrow \cos 7x = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = 3x + k2\pi \\ 7x = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin 4x.\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x) = \cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x = -\frac{1}{2}\cos x \Leftrightarrow \cos 7x = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \pi - x + k2\pi \\ 7x = x - \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos x.\cos 3x = \cos 5x.\cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x)$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 12x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x = 4x + k2\pi \\ 12x = -4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$$

d) $\sin 3x.\cos 7x = \sin 13x.\cos 17x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-\sin 4x + \sin 10x) = \frac{1}{2}(-\sin 4x + \sin 30x)$

$$\Leftrightarrow \sin 30x = \sin 10x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 30x = 10x + k2\pi \\ 30x = \pi - 10x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{10} \\ x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{20} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 9.** Giải các phương trình:

a) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0$ b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ d) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$

**Giải**

a) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0 \Leftrightarrow (\sin 4x+\sin x)+(\sin 3x+\sin 2x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{5x}{2}\cos x.\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{5x}{2}=0\\ \cos x=0\quad (k\in\mathbb{Z})\\ \cos\dfrac{x}{2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{5x}{2}=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k2\pi}{5}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}).\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

d) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{1-\cos 6x}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 6x=0 \Leftrightarrow (1+\cos 6x)-(\cos 4x+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 3x-2\cos 3x\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x(\cos 3x-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow -4\cos 3x.\sin 2x.\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \sin 2x=0\\ \sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ -2x=k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

**Bài 13.** Giải phương trình: $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$.

**Giải**

Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\tan x + \tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 14.** Giải phương trình: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$ với $x \in (0; 2\pi)$.

**Giải**

Ta có phương trình tương đương với $\begin{cases} 0 < x < 2\pi \\ \dfrac{2\cos 2x.\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \pi \\ \cos 2x = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} \pi < x < 2\pi \\ \cos 2x = -\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \pi \\ \cos 2x = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} \pi < x < 2\pi \\ \cos 2x = \cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \pi \\ 2x = -2x + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} \pi < x < 2\pi \\ 2x = -2x - \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \pi \\ x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \pi < x < 2\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} \\ x = \dfrac{9\pi}{16} \\ x = \dfrac{21\pi}{16} \\ x = \dfrac{29\pi}{16} \end{array}\right..$$

**Bài 15.** Giải phương trình: $8\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$.

**Giải**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 4\sin x.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2(\cos x - \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 16.** Giải phương trình:

$$\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x\cos^3 3x.$$

**Giải**

Ta có phương trình tương đương với

$$\cos 10x + \cos 8x + 1 = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos 10x + \cos 8x) + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 9x\cos x + 1 = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 17.** Giải phương trình: $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$ (1).

**Giải**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x}{(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cos x + \sin 2x}{2\cos 2x\cos x + \cos 2x} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2\cos x + 1)}{\cos 2x(2\cos x + 1)} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \tan 2x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 18.** Giải phương trình: $\cos^3 x(1 + \tan x) + \sin^3 x(1 + \cot x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$.

**Giải**

Điều kiện $\sin x.\cos x > 0 \Rightarrow \sin 2x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \sin^2 x \cos x = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) + \sin x \cos x(\cos x + \sin x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

**Bài 19.** Giải phương trình: $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

**Giải**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\cos 2x + \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x - \cos 2x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \tan 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 20.** Giải phương trình: $\dfrac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\cos 2x} = 16(1+\cos 4x)$.

**Giải**

Điều kiện $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x.\cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\dfrac{1}{4}\sin^2 2x.\cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x\cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 2x.\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 8x = 1 \Leftrightarrow \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 21.** Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$.

**Giải**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó phương trình trở thành

$$2(\sin 3x - \cos 3x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin 3x - \cos 3x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+x+k2\pi \\ 5x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

**Bài 22.** Giải phương trình: $\sin^6 x+\cos^6 x=\cos 4x$.

**Giải**

Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)[(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x]$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$=1-\frac{3}{4}\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 4x=1\Leftrightarrow 4x=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 23.** Giải phương trình: $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.

**Giải**

Phương trình tương đương $\begin{cases} 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0 \\ 4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0 \\ 2\left[1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=1+8\sin 2x\cos^2 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ 2+\sin 6x = 1+8\sin 2x\left(1-\sin^2 2x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ 2 = 2\left(3\sin 2x - 4\sin^3 2x\right) = 1+8\sin 2x - 8\sin^3 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

+ Với $x = \frac{5\pi}{12}+k\pi$ thì $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+3k\pi\right) = \cos(3k\pi) \ge 0$

$\Rightarrow 3k = 2m, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12}+2m\pi, m \in \mathbb{Z}$

+ Với $x = \frac{\pi}{12}+k\pi$ thì $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+3k\pi\right) = -\cos(3k\pi) \ge 0$

$\Rightarrow 3k = 1+2m, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{12}+(2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12}+2m\pi \\ x = \frac{5\pi}{12}+(2m+1)\pi \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{Z})$.

**Bài 24.** Giải phương trình: $\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x = \frac{1}{16}$.

### Giải

Nhận xét $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho tức là $\sin x \ne 0$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \sin x$$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x\cos 4x\cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos 8x = \sin x \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16x = x + k2\pi \\ 16x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m2\pi}{15} \\ x = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{m2\pi}{17} \end{array}\right. m \in \mathbb{Z}$$

Ta có $\dfrac{m2\pi}{15} = k\pi \Leftrightarrow m = \dfrac{15k}{2} = 7k + \dfrac{k}{2}$

Vì $m, k \in \mathbb{Z}$ nên Đặt $\dfrac{k}{2} = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 14n + n = 15n$

$\dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2m\pi}{17} = k\pi \Leftrightarrow m = \dfrac{17k-1}{2} = 8k + \dfrac{k-1}{2}$

Vì $m, k \in \mathbb{Z}$ nên Đặt $\dfrac{k-1}{2} = h \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 2h + 1$

$\Rightarrow m = 8(2h+1) + h = 17h + 8$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2m\pi}{15} (\text{ với } m \neq 15n, n \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2m\pi}{17} (\text{với } m \neq 17h + 8, h \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình

a) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.  b) $\cos(2x + 25^0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.  d) $\cot(4x + 2) = -\sqrt{3}$.

e) $\sin(2x - 10^0) = \dfrac{1}{2}$ với $-120^0 < x < 90^0$.

f) $\cos(2x + 1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

**Bài 2.** Giải các phương trình

a) $\sin 3x = \cos 4x$  b) $\sin 5x + \cos 4x = 0$

c) $\sin(2x + 60^0) = \cos(x + 120^0)$  d) $\tan 3x.\tan x = 1$.

**Bài 3**. Giải các phương trình

a) $\sqrt{3}-2\sin 2x=0.$

b) $2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0.$

c) $3\tan\left(\dfrac{2x}{3}-20^{\circ}\right)+\sqrt{3}=0.$

d) $4\sin x.\cos x.\cos 2x=1.$

e) $2\sin x-\sqrt{2}\sin 2x=0.$

f) $8\cos^{3}x-1=0.$

g) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)(2\cos x+\sqrt{2})\tan 2x=0.$

h) $(2\sin x+1)^{2}-(2\sin x+1)\left(\sin x-\dfrac{3}{2}\right)=0.$

i) $\tan 2x.\sin x+\sqrt{3}\left(\sin x-\sqrt{3}\tan 2x\right)-3\sqrt{3}=0.$

**Bài 4**. Giải các phương trình

a) $\cos^{2}(x-30^{0})-\sin^{2}(x-30^{0})=\sin(x+60^{0}).$

b) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0.$

c) $\sin^{4}x-\sin^{4}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x.$

d) $\dfrac{\cos 2x}{\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)}{\cos 2x}.$

e) $\sin^{2}\left(5x+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos^{2}\left(\dfrac{x}{4}+\pi\right).$

f) $\sin^{2}2x+\cos^{2}3x=1.$

g) $\left(\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot 2x\right)(3\tan x-\sqrt{3})=0.$

h) $\tan^{3}x-1+\dfrac{1}{\cos^{2}x}-3\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=3.$

i) $\cos 2x\cos x+\sin x\cos 2x=\sin 2x\sin x-\sin 3x\cos x.$

**Bài 5**. Giải các phương trình

a) $\sin\left(x+24^{0}\right)+\sin\left(x+144^{0}\right)=\cos 20^{0}.$

b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$

c) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$

d) $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x.$

e) $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.

f) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

g) $\cos^2 2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

h) $\sin x \sin 4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3}\cos x \sin 4x$.

**Bài 6**. Giải các phương trình

a) $\sin 3x \sin 5x = \sin 11x \sin 13x$. b) $\sin 3x \cos 7x = \sin 11x \cos 15x$.

c) $\cos x \cos 2x = \cos 3x \cos 4x$. d) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$.

e) $\sin 4x \cos 3x = \sin x$. f) $\sin x \sin 5x = \cos 4x$.

g) $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}$. h) $4\cos x \sin^2 x = \cos x - \sin x$.

i) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

**Bài 7**. Giải các phương trình

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$.

b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 3x$.

c) $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$.

**Bài 8**. Giải các phương trình

a) $\sin^3 x.\cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \sin x$.

b) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

**Bài 9**. Giải các phương trình

a) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$.

b) $\frac{\sin x.\cot 5x}{\cos 9x} = 1$.

c) $\frac{\sin^4 + \cos^4 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$.

d) $\frac{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}{1 - \sin x} - \tan^2 x.\sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \tan^2 x$.

**Bài 10**. Giải các phương trình

a) $\cos 3x.\tan 5x = \sin 7x$. b) $\sqrt{25 - 4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** Đáp số

a) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

b) $\left[\begin{array}{l} x=55^\circ+k180^\circ \\ x=-80^\circ+k180^\circ \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

c) Điều kiện: $x\neq\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi.$$

d) Điều kiện: $x\neq-\dfrac{1}{2}+\dfrac{k\pi}{4}$

$$\cot(4x+2)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot(4x+2)=-\cot\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\cot(4x=2)=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4}.$$

e) $\sin\left(2x-10^0\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x-10^0\right)=\sin30^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=20^\circ+k180^\circ \\ x=80^\circ+k180^\circ \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Ta có: $\begin{cases} x=20^\circ+k180^0 \\ -120^\circ<x<90^\circ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=0 \\ x=20^\circ \end{cases}$

$\begin{cases} x=80^\circ+k180^0 \\ -120^\circ<x<90^\circ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=-1;x=-100^\circ \\ k=0;x=80^\circ \end{cases}$

Vậy $x=-100^0;20^0;80^0$.

f) $\cos(2x+1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos(2x+1)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}+k\pi \\ -\pi<x<\pi \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=0;x=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2} \\ k=1;x=\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}+k\pi \\ -\pi<x<\pi \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=0;x=-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2} \\ k=1;x=\dfrac{7\pi}{8}-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

**Bài 2:**

a) $\sin 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin 5x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = -\cos 4x \Leftrightarrow \sin 5x = \cos(\pi - 4x)$

$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\pi - 4x)\right]$

$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\sin\left(2x + 60^0\right) = \cos\left(x + 120^0\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + 60^0\right) = \sin\left[90^0 - \left(x + 120^0\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x + 60^0\right) = \sin\left(-x - 30^0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -30^0 + k120^0 \\ x = 160^0 + k360^0 \end{array}\right.$.

d) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$\tan 3x \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 3.**

a) Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) $2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k6\pi \\ x = -\frac{5\pi}{4} + k6\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Điều kiện: $x \neq 135^0 + k270^0$

$3\tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{2x}{3}-20^0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{2x}{3}-20^0\right)=\tan\left(-30^0\right).$$

d) $4\sin x\cos x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

e) $2\sin x-\sqrt{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ 1-\sqrt{2}\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

f) $8\cos^3 x-1=0 \Leftrightarrow (2\cos x-1)\left(\cos^2 x+\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ \cos^2 x+\cos x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ VN \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi.$$

g) Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2\cos x+\sqrt{2})\tan 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x-\frac{\pi}{4})=0 \\ 2\cos x+\sqrt{2}=0 \\ \tan 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

h) $(2\sin x + 1)^2 - (2\sin x + 1)(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x + \frac{5}{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

i) Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$\tan 2x.\sin x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x.\sin x + \sqrt{3}\sin x - 3\tan 2x - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x(\sin x - 3) + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - 3)(\tan 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \tan 2x + \sqrt{3} = 0.$

**Bài 4.**

a) $\cos^2(x - 30^\circ) - \sin^2(x - 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$

$\Leftrightarrow \cos2(x - 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - 60^0\right) = \sin\left(x + 60^0\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - 60^0\right) = \cos\left(30^0 - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30^0 + k120^0 \\ x = 30^0 + k360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 30^0 + k120^0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Điều kiện: $1 + \cos2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Ta có: $\sin^4(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos^4 x$; $4\sin\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}.\cos x = \sin2x$

$\sin^4 x - \sin^4(x + \dfrac{\pi}{2}) = 4\sin\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}.\cos x \Leftrightarrow \sin^4 x - \cos^4 x = \sin2x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin2x \Leftrightarrow -\cos2x = \sin2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) Điều kiện: $x \neq -\dfrac{3\pi}{4} + k\pi$; $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$$\frac{\cos 2x}{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos 2x} \Leftrightarrow \cos^2 2x = \sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = -\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) $\sin^2\left(5x + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\dfrac{x}{4} + \pi\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{1 + \cos 2\left(\frac{x}{4} + \pi\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(10x+\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}-10x\right)=\cos\frac{x}{2}.$$

f) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 3x \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{k\pi}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{5}\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

g) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$; $x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\left(\frac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot 2x\right)(3\tan x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot 2x=0 & (1) \\ 3\tan x-\sqrt{3}=0 & (2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=-\cot 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\cot(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

$$(2)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

h) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\tan^3 x-1+\frac{1}{\cos^2 x}-3\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3 \Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x(\tan x+1)-3(\tan x+1)=0 \Leftrightarrow (\tan x+1)(\tan^2 x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \tan^2 x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \tan x=\pm\sqrt{3}=\tan\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z}).$$

i) $\cos 2x.\cos x + \sin x.\cos 3x = \sin 2x.\sin x - \sin 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x = -(\sin x.\cos 3x + \sin 3x.\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x + x) = -\sin(x + 3x) \Leftrightarrow \cos 3x = -\sin 4x$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{7}\end{array}\right. \ k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a) $\sin(x + 24^\circ) + \sin(x + 144^\circ) = \cos 20^\circ$

$\Leftrightarrow 2\sin(x + 84^\circ)\cos 60^\circ = \cos 20^\circ$

$\Leftrightarrow \sin(x + 84^\circ) = \cos 20^\circ$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + 84^\circ\right) = \sin 70^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -14^0 + k360^0 \\ x = 260 + k360^0 \end{array}\right.$.

b) Đáp số: $x = \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

*Hướng dẫn*

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$.

c) Đáp số: $x = \dfrac{(2k-1)\pi}{2}$; $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{5}$

*Hướng dẫn*

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2\cos 2x\cos x + 2\cos 3x\cos x$

$= 2\cos x(\cos 2x + \cos 3x)$.

d) Đáp số: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}$.

*Hướng dẫn*

$1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sin x = \cos x - \cos 3x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 2\sin 2x\sin x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = \sin 2x(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - \sin 2x) = 0$.

e) Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}$.

*Hướng dẫn*

$\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$

$\Leftrightarrow \cos 7x + \cos x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 3x - 1) = 0$.

f) Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

*Hướng dẫn*

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

g) Đáp số: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ; $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ ; $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$.

*Hướng dẫn*

$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 8x + \cos 2x) + (\cos 6x + \cos 4x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x\cos 3x + 2\cos 5x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$.

h) Đáp số: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

*Hướng dẫn*

$\sin x.\sin 4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3}\cos x\sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin x.\sin 4x + \sqrt{3}\cos x\sin 4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow \sin 4x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow \sin 4x(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin 4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)(\sin 4x - 1) = 0.$

**Bài 6.** Đáp số

a) $x = \frac{k\pi}{8}$ ; $x = \frac{k\pi}{16}$.

b) $x = \frac{k\pi}{8}$ ; $x = \frac{(2k+1)\pi}{36}$.

c) $x = \frac{k\pi}{5}$ ; $x = \frac{k\pi}{2}$.

d) $x = \frac{k\pi}{2}$.

e) $x = \frac{k\pi}{3}$ ; $x = \frac{(2k+1)\pi}{8}$.

f) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ; $x = \frac{(2k+1)\pi}{10}$.

g) $x = \frac{(2k+1)\pi}{7}$.

*Hướng dẫn*

$x=(2k+1)\pi$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\neq 0$

$$\text{PT}\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}(\cos x-\cos 2x+\cos 3x)=\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\cos x-2\cos x\frac{x}{2}co2x+2\cos x\frac{x}{2}\cos 3x=\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{5x}{2}=\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{7x}{2}=0.$$

h) Đáp số: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

*Hướng dẫn*

$4\cos x\sin^2 x=\cos x-\sin x\Leftrightarrow 2\sin 2x\sin x=\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow \cos x-\cos 3x=\cos x-\sin x\Leftrightarrow \cos 3x=\sin x$

i) Đáp số: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{k\pi}{2}$.

*Hướng dẫn*

$$\frac{1}{4}\sin 4x=\sin x\sin 2x\sin 3x\Leftrightarrow\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x-\cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x\Leftrightarrow\sin 2x\cos 4x=0.$$

**Bài 7.** Đáp số

a) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$

b) $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ ; $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

c) $x=k2\pi$ ; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$

**Bài 8.** Đáp số

a) $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

b) $x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

**Bài 9.** Đáp số

a) $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$

b) $x=\frac{k\pi}{4}(k\neq 4m; m,k\in\mathbb{Z})$ ; $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}, k\in\mathbb{Z}$.

c) Phương trình vô nghiệm.

d) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$.

*Hướng dẫn*

Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{4}\left[(1-\cos x)^2+(1+\cos x)^2\right]=\frac{(1-\sin^2 x)(1+2\tan^2 x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos^2 x)=\frac{1}{2}(\cos^2 x+\sin^2 x)\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

**Bài 10.** Đáp số

a) $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$; $x=l\pi$; $k,l\in\mathbb{Z}$.

*Hướng dẫn*

Điều kiện $\cos 5x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}; m\in\mathbb{Z}$

Khi đó, phương trình trở thành: $\cos 3x.\sin 5x=\sin 7x.\cos 5x$

$$\Leftrightarrow \sin 12x=\sin 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Xét $\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}\Rightarrow 5k-2m=1$

$\Rightarrow m=\frac{5k-1}{2}=2k+\frac{k-1}{2}$

Vì $m,k\in\mathbb{Z}$ nên $\frac{k-1}{2}=l\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=2l+1$

Suy ra nghiệm $x=l\pi$

Xét $\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}=\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}\Leftrightarrow 2k-4m=1$

$\Leftrightarrow 2(k-2m)=1$ Vô lí

Suy ra nghiệm $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$.

b) $x=0; x=\pm 1; x=\pm 2; x=\pm\frac{5}{2}$.

*Hướng dẫn*

Điều kiện $25-4x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{25-4x^2}=0 \\ 3\sin 2\pi x+8\sin \pi x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ 6\sin \pi x.\cos \pi x+8\sin \pi x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ 2\sin \pi x(3\cos \pi x+4)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ \sin \pi x=0 (\text{vì } 3\cos \pi x+4>0\ \forall x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ \pi x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ x=k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vì $-\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$ nên phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{5}{2} \\ x=0;\pm 1;\pm 2 \end{array}\right.$.

## B. BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ (1).  b) $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 = 0$ (2).

**Giải**

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x; |t| \le 1 \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x; |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2 x\right) + 4\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x, |t| \le 1 \\ 4t^2 - 4t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x, |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

*Nhận xét: Đối với phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác ta có thể bỏ qua bước đặt ẩn phụ và giải lấy nghiệm trực tiếp từ các phương trình.*

**Bài 2.** Cho phương trình: $\sin^2 3x + \left(m^2 - 3\right)\sin 3x + m^2 - 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = 1.

b) Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

**Giải**

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = -1 \\ \sin 3x = 4 - m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ \sin 3x = 4 - m^2 \ (2) \end{array}\right.$

a) Với $m = 1$, ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow \sin 3x = 3$ (Vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Với $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ vì $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ nên $x = \frac{7\pi}{6}$

Như vậy, phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thuộc $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ và khác $\frac{7\pi}{6}$

Ta có $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi \le 3x \le 4\pi$

Do đó, để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thuộc $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ và khác $\frac{7\pi}{6}$ thì $4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Khi đó $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

Suy ra $x = \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}$

Vậy với $m = \pm 2$ thì phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

**Bài 3.** Cho phương trình: $4\sin^2 2x + 8\cos^2 x - 5 + 3m = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

**Giải**

Ta có $(1) \Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2 2x\right) + 4\left(1 + \cos 2x\right) - 5 + 3m = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 - 3m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x, |t| \le 1 \\ 4t^2 - 4t - 3 - 3m = 0 \quad (2) \end{cases}$$

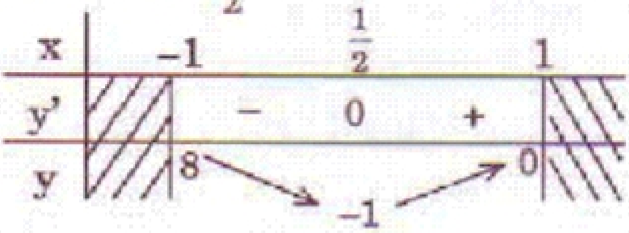
a) Với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình (2) $\Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow 4t^2 - 4t = 3 + 3m$

Xét $y = 4t^2 - 4t$ trên $[-1;1]$

$$y' = 8t - 4 = - \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$



$y = 3m + 3$ là đường thẳng cùng phương với Ox, cắt Oy tại điểm có tung độ 3m + 3

Suy ra, để phương trình (1) có nghiệm thì $-1 \le 3m + 3 \le 8$

$$\Leftrightarrow -4 \le 3m \le 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le \frac{5}{3}.$$

**Bài 4.** Giải phương trình: $3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x)$ (1).

### Giải

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Ta có $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \frac{6}{\sin 2x} = 2(2 + \sin 2x)$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 5.** Giải các phương trình:

a) $3\sin x + 2|\cos x| - 2 = 0$ (1)

b) $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$ (2)

### Giải

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow 2|\cos x| = 2 - 3\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\sin x \ge 0 \\ 4\cos^2 x = (2 - 3\sin x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \frac{2}{3} \\ 4(1 - \sin^2 x) = 4 - 12\sin x + 9\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \frac{2}{3} \\ 13\sin^2 x - 12\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{12}{13} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

*Nhận xét: Đối với phương trình có dạng* $|A| = B$ *ta có thể dùng một trong các cách giải sau*

* Áp dụng $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$

* Xét dấu A và mở dấu trị số tuyệt đối.

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin x \ge 0 \\ 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ 5\cos x - 2\cos^2 x + 1 = 4\left(1 - \cos^2 x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

*Nhận xét: Đối với phương trình có dạng* $\sqrt{A} = B$ *ta thực hiện phép biến đổi tương đương* $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

**Bài 6.** Cho phương trình: $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = k\cos x \quad (1)$

a) Giải phương trình với k = 2.

c) Giải và biện luận phương trình (1).

**Giải**

a) Điều kiện $\cos x \ge 0$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cos x = 4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} k\cos x \geq 0 \\ 2+2\sqrt{1-\sin^2 x} = k^2\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\cos x \geq 0 \\ k^2\cos^2 x - 2|\cos x| - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\cos x \geq 0 \\ t = |\cos x|, 0 \leq t \leq 1 \\ k^2t^2 - 2t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\cos x \geq 0 \\ t = |\cos x|, 0 \leq t \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1-\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Suy ra $|\cos x| = \dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

Ta có $\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+2k^2} \leq k^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 1 \geq 0 \\ 1+2k^2 \leq k^4 - 2k + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k^2 \geq 4 \Leftrightarrow |k| \geq 2.$

Khi đó:

+ Nếu $k \leq -2$ thì $\cos x = -\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(\dfrac{-1-\sqrt{1+2k^2}}{k^2}\right) + k2\pi$

+ Nếu $-2 < k < 2$, thì phương trình vô nghiệm

+ Nếu $k > 2$ thì $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Bài 7.** Giải phương trình: $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ (1)

**Giải**

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left(\sin 2x + \dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\cos 2x\right)^2 - \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(\sin 2x \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos 2x \cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 - \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\pi+k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 8.** Giải phương trình: $\frac{\sin x\left(3\sqrt{2}-2\cos x\right)-2\sin^2 x-1}{1-\sin 2x}=1\ (1)$

**Giải**

Điều kiện $1-\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{2}\sin x-\sin 2x-2\sin^2 x-1=1-\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\ (\text{loại})\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (\text{loại})\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 9.** Giải phương trình: $\frac{4\sin^2 2x+6\sin^2 x-9-3\cos 2x}{\cos x}=0\ (1)$

**Giải**

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 4\left(1-\cos^2 2x\right)+3\left(1-\cos 2x\right)-9-3\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+3\cos 2x+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (\text{loại})\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 10.** Giải phương trình: $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 4x}$ (1)

**Giải**

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\\ \sin 4x \neq 0\end{cases}$

Khi đó ta có

$(1) \Leftrightarrow 4\sin x\cos 2x + 2\cos 2x = 2$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos 2x = 2(1-\cos 2x)$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos 2x = 4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x$ (vì $\sin x > 0$)

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 1 = \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \text{ (loại)}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 11.** Giải các phương trình

a) $\cos^6 x + \sin^6 x = 2\sin x\cos x + 1$ (1)

b) $\cos^8 x + \sin^8 x = \dfrac{17}{6}\cos^2 2x$ (2)

**Giải**

a) Ta có $\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 + \sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$

$= (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 - \sin^2 \cos^2 x$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = \sin 2x + 1 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin 2x = -\dfrac{3}{4} \text{(loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có $\cos^8 x + \sin^8 x = \left(\cos^4 x\right)^2 + \left(\sin^4 x\right)^2$

$=\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = \left[\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2 = -2\cos^2 x\sin^2 x\right]^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$= \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1-\sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x$

$= 1-\sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x = \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\sin^4 2x - \frac{1}{16}\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin^2 2x, 0\le t\le 1 \\ 2t^2+t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin^2 2x, 0\le t\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$.

**Bài 12.** Tìm giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm

a) $\sin^4 + \cos^4 x = m.\sin 2x - \frac{1}{2}$ (1)

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = m|\sin 2x|$ (2)

**Giải**

a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x$

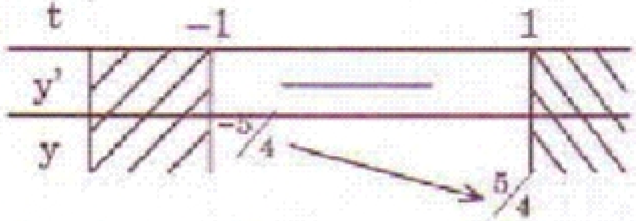
Khi đó $(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x = m\sin 2x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 4m\sin 2x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin 2x, -1\le t\le 1 \\ t^2+4mt-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin 2x; -1\le t\le 1 \\ m=\frac{6-t^2}{4t} \text{ (vì } t\ne 0) \end{cases}$$

Xét $y = \frac{6-t^2}{4t}$ với $-1\le t\le 1$; $\quad y' = -\frac{3}{2t^2} - \frac{1}{4} < 0\ \forall t\ne 0$

Vậy



y = m là đường thẳng cùng phương với Ox cắt Oy tại điểm có tung độ m

Khi đó, phương trình đã cho có nghiệm khi $-\frac{5}{4} \le m \le \frac{5}{4}$

b) Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

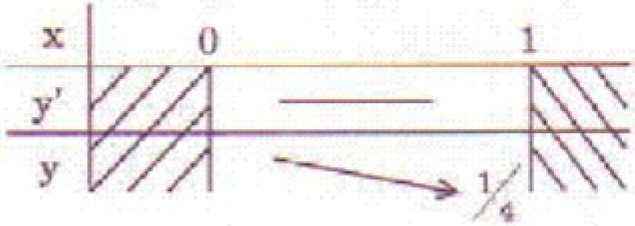
Khi đó $(2) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m|\sin 2x| \Leftrightarrow 3|\sin 2x|^2 + 4m|\sin 2x| - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = |\sin 2x|, 0 \le t \le 1 \\ 3t^2 + 4mt - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = |\sin 2x|; 0 \le t \le 1 \\ m = \frac{4 - 3t^2}{4t} (t \ne 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = |\sin 2x|; 0 < t \le 1 \\ m = \frac{1}{t} - \frac{3t}{4} \end{cases}$$

Xét $y = \frac{1}{t} - \frac{3t}{4}$ với $0 \le t \le 1$

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{3}{4} < 0 \; \forall t \ne 0$$

Vậy



y = m là đường thẳng cùng phương với Ox cắt Oy tại điểm có tung độ m

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \ge \frac{1}{4}$.

**Bài 13.** Giải các phương trình

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$ (1)

b) $(\sin x + 3)\sin^4 \frac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2 \frac{x}{2} + 1 = 0$ (2)

**Giải**

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1 + 2\cos 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ 4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm\arccos\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

b) Ta có $(\sin x + 3)\sin^4\dfrac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2\dfrac{x}{2}$

$$= (\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right) = -(\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}(\sin x + 3)\sin^2 x$$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}(\sin x + 3)\sin^2 x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, -1 \le t \le 1 \\ t^3 + 3t^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, -1 \le t \le 1 \\ (t-1)(t+2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, -1 \le t \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 14.** Xác định các giá trị của m để 2 phương trình sau đây là tương đương với nhau

$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x.\sin 2x$ (1)

$m\cos 3x + (4 - 8m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$ (2)

**Giải**

Ta có $(1) \Leftrightarrow \cos 2x + 1 + 2\cos x - \cos 3x + \cos x = 2\sin x\sin 2x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x + 2\sin x\sin 2x = 2\sin x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow 4m\cos^3 x + 4(2m-1)\cos^2 x + 4(m-1)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x\left[m\cos^2 x+(2m-1)\cos x+m-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ m\cos^2 x+(2m-1)\cos x+m-1=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

+ Nếu $m = 0$ thì $(3) \Leftrightarrow \cos x = -1$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow (1)$

+ Nếu $m \neq 0$ thì $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1-m}{m}\end{array}\right.$

Do đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1-m}{m}\end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) ⇔ phương trình (2) khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{1-m}{m}=0\\ \dfrac{1-m}{m}=-1\\ \left|\dfrac{1-m}{m}\right|>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ 0<m<\dfrac{1}{2}\\ m<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ 0\neq m<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy để 2 phương trình tương đương thì $m = 1$ hoặc $m<\dfrac{1}{2}$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình:

a) $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

b) $\cos 2x+\sin^2 x+2\cos x+1=0$.

**Bài 2.** Cho phương trình $\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m+1=0$

a) Giải phương trình khi $m=\dfrac{3}{2}$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

**Bài 3.** Giải phương trình:

a) $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

b) $\sin 4x=\tan x$.

**Bài 4**. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x\left(2\sin x+3\sqrt{2}\right)-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1$.

**Bài 5**. Giải phương trình: $\dfrac{\cos 2x+3\cot 2x+\sin 4x}{\cot 2x-\cos 2x}=2$.

**Bài 6**. Giải phương trình:

a) $4\sin x+3|\cos x|=4$.

b) $|\tan x|=\cot x+\dfrac{1}{\cos x}$.

**Bài 7**. Giải phương trình: $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x$.

**Bài 8**. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x}=4\cos x$.

**Bài 9**. Xác định a để hai phương trình sau tương đương

$2\cos x\cos 2x=1+\cos 2x+\cos 3x$ (1)

$4\sin^2 x+4\cos 2x-\cos 3x=a\cos x+(4-a)(1+\cos 2x)$ (2)

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1**. Đáp số

a) $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b) $x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 2**. Đáp số

a) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b) $-1\le m<0$.

**Bài 3**.

Phương trình tương đương với

$4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x-8\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x+3\sqrt{2}\sin x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sqrt{2}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$4\sin x\cos x\cos 2x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x.\cos 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 4\cos^2 x.\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2(\cos 2x + 1)\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\ \text{(loại)} \\ \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 4.** Đáp số

$x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

***Hướng dẫn***

Quy đồng mẫu đưa về phương trình $2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$.

**Bài 5**. Đáp số

$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi;\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in Z$

***Hướng dẫn***

Quy đồng mẫu đưa về phương trình $2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0$.

**Bài 6**. Đáp số

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \arcsin\frac{7}{25} + k2\pi$

$x = \pi - \arcsin\frac{7}{25} + k2\pi\ (k \in Z)$

***Hướng dẫn***

Phương trình tương đương

$3|\cos x| = 4 - 4\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4\sin x \geq 0 \\ 9\cos^2 x = 16 - 32\sin x + 16\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 1 \\ 25\sin^2 x - 32\sin x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{7}{25} \end{array} \right.$$

b) $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

***Hướng dẫn***

Chia 2 trường hợp

+ $\tan x > 0$ khi đó phương trình tương đương với $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \sin x = 1 \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{Suy ra nghiệm}$$

+ $\tan x < 0$ khi đó phương trình tương đương với $\sin x = -1$ (loại).

**Bài 7**. Đáp số

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in Z)$.

**Bài 8**. Đáp số

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ (k \in Z)$

***Hướng dẫn***

Điều kiện $\sin x \neq 0$

Biến đổi phương trình về dạng

$\sqrt{1-\sin^2 2x} = 1-2\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow |\cos 2x| = 1-2\cos^2 2x$

và xét 2 trường hợp

+ $\cos 2x \geq 0$ phương trình trở thành $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

Giải phương trình ta có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

+ $\cos 2x < 0$ phương trình trở thành $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$.

Giải phương trình ta có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 9**. Đáp số

$a < 1$ hoặc $a = 3$ hoặc $a = 4$ hoặc $a > 5$.

***Hướng dẫn***

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow \cos x\left[4\cos^2 x + 2(2-a)\cos x + a - 3\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x + 2(2-a)\cos x + a - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{a-3}{2} \end{array}\right.$$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a-3}{2} = 0 \\ -\frac{a-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \left|\frac{a-3}{2}\right| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 4 \\ a < 1 \text{ hoặc } a > 5 \end{array}\right..$$

## Dạng 2. Phương trình theo một hàm lượng giác $f(\tan x) = 0$.

***Phương pháp:***

1. *Đặt* $t = \tan x$ *với* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. *Biến đổi phương trình về dạng* $f(t) = 0$

3. *Giải phương trình* $f(t) = 0$ *tìm nghiệm* $t_0$ *và ta có phương trình* $\tan x = t_0$ *và tìm nghiệm x của phương trình*

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$.

b. $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos^2 x + \cos 2x$.

**Giải**

a. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x.\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(1 - 2\sin^2 x + \sin x \cos x)$$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$, ta có:

$$\tan x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x = 3(1 + \tan^2 x - 2\tan^2 x + \tan x)$$

Đặt $t = \tan x$ ta có: $t^3 - 2t^2 = 3(1 - t^2 + t)$

$$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos^2 x + \cos 2x$

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình

Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta có:

$$\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{2}\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan x=\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow \tan x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\arctan\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+k\pi$$

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\arctan\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$.  b. $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$.

**Giải**

a. Điều kiện $\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$ (*)

Đặt: $y=x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=y+\frac{\pi}{4}$ nên $\tan x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan y+1}{1-\tan y}$

Ta có: $\tan^3 y=\frac{\tan y+1}{1-\tan y}-1$ và đặt $t=\tan y$

Khi đó: $t^3+1=\frac{t+1}{1-t}\Leftrightarrow (t+1)t\left(t^2-2t+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ y=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+l\pi,\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$ thoả mãn (*)

b. Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin x=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t-\cos t)$

Ta có: $\sin^3 t=\sin t-\cos t\Leftrightarrow \sin\left(\sin^2 t-1\right)=-\cos t$

$$\Leftrightarrow \sin t\cos^2 t=\cos t\Leftrightarrow \cos t(\sin t\cos t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \sin 2t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \cos t=0\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

***Cách khác:*** $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)\right]^3=\sqrt{2}\sin x$

$(\cos x+\sin x)^3=4\sin x\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^3=\frac{4\sin x}{\cos^3 x}\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow(\tan x+1)^3=4\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$

Đặt $t=\tan x$ ta có $(t+1)^3=4t\left(1+t^2\right)$

$\Leftrightarrow 3t^3-3t^2+t-1=0\Leftrightarrow(t-1)\left(3t^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a. $\frac{2}{\sin^2 x}+2\tan^2 x+5\tan x+5\cot x+4=0$.

b. $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6$.

**Giải**

a. Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

$\frac{2}{\sin^2 x}+2\tan^2 x+5\tan x+5\cot x+4=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1+\cot^2 x\right)+2\tan^2 x+5(\tan x+\cot x)+4=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+5(\tan x+\cot x)+6=0 \qquad (1)$

Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow|t|=|\tan x+\cot x|\geq 2,\ \forall x\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z$

$\tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

Phương trình (1) trở thành: $2t^2+5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=-\frac{1}{2}(\text{loại})\end{array}\right.$

$\tan x+\cot x=-2\Leftrightarrow\tan x+\frac{1}{\tan x}=-2\Leftrightarrow\tan^2 x+2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$

$\Leftrightarrow \tan x + \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x + (\tan x + \cot x)(\tan^2 x + \cot^2 x - 1) = 6$

Đặt $t = \tan x + \cot x \Rightarrow |t| \geq 2$ và $\tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$

Ta có: $t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 4.** Cho phương trình: $\cos 2x = m\cos^2 x\sqrt{1 + \tan x}$

a. Giải phương trình khi m = 1.

b. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

### Giải

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \geq 0 \end{cases}$

Ta có: $\cos 2x = m\cos^2 x\sqrt{1 + \tan x} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = m\cos^2 x\sqrt{1 + \tan x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} = m\sqrt{1 + \tan x}$

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x - 2\tan^2 x = m\sqrt{1 + \tan x}$

$\Leftrightarrow 1 - \tan^2 x = m\sqrt{1 + \tan x}$

Đặt $t = \tan x$ thì $t \geq -1$ và ta có $1 - t^2 = m\sqrt{1 + t}$.

a) Khi m = 1 thì $1 - t^2 = \sqrt{1 + t} \Leftrightarrow (1 + t)(1 - t) = \sqrt{1 + t}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ (1 + t)t(t^2 - t - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = \arctan\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) Khi $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \sqrt{3}\right]$

Ta có: $1-t^2=m\sqrt{1+t}\Leftrightarrow m=\dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}=f(t)$

$f'(t)=\dfrac{-3t^2-4t-1}{2(1+t)\sqrt{1+t}}<0,\forall x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$

Phương trình có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ khi $f\left(\sqrt{3}\right)\le m\le f(0)$

$\Rightarrow\dfrac{-2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\le m\le 1$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

b. $\cos^3 x-4\sin^3 x-3\cos x\sin^2 x+\sin x=0$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

a. $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$.

b. $4\sin^3 x+3\cos^3 x-3\sin x-\sin^2 x\cos x=0$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau

a. $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos x-\sin x$.

b. $\sin^2 x(\tan x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$.

**Bài 4.** Giải các phương trình sau

a. $\tan x=\cot x+2\cot^3 2x$.

b. $2\left(\sin^3 x+\sqrt{3}\cos^3 x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

**Bài 5.** Giải các phương trình sau

a. $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0$.

b. $3\tan 2x-4\tan 3x=\tan^2 3x\tan 2x$.

**Bài 6.** Giải các phương trình sau

a. $2\cot^2 x+\dfrac{2}{\cot^2 x}+5\tan x+5\cot x+4=0$.

b. $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=1-\sin 2x$.

**Bài 7.** Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm

a. $\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+m(\tan x+\cot x)-1=0$.

b. $\frac{m^2}{1-\tan^2 x}=\frac{\sin^2 x+m^2-2}{\cos 2x}$.

**Bài 8.** Cho phương trình:

$$(4-6m)\sin^3 x+3(2m-1)\sin x+2(m-2)\sin^2 x\cos x-(4m-3)\cos x=0.$$

a. Giải phương trình khi m = 2.

b. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

**Bài 9.** Cho tam giác ABC cân có một góc là nghiệm của phương trình $\tan x-\tan\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

a. Điều kiện: $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x-\cos^3 x=5\sin x\cos^2 x$

Chia hai vế cho $\cos^3 x$ (do $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình)

Ta có: $3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-1=5\tan x$

Đặt $t=\tan x$ ta có: $3t^3-2t-1=0\Leftrightarrow(t-1)\left(3t^2+3t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$(loại)

Phương trình vô nghiệm.

b. Ta có: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$

$1-4\tan^3 x-3\tan^2 x+\left(1+\tan^2 x\right)\tan x=0$

Đặt $t=\tan x$ thì $3t^3+3t^2-t-1=0\Leftrightarrow(t+1)\left(3t^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

**Bài 2.**

a. Chia hai vế cho $\cos^3 x\neq 0$ ta có $\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x+\left(1+\tan^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$ đặt $t=\tan x$

$\Leftrightarrow 3t^2-t^2-t-1=0\Leftrightarrow (t-1)\left(3t^2+2t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$.

b. Chia hai vế cho $\cos^3 x\neq 0$ ta có

$4\tan^3 x+3-3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan^2 x=0$ Đặt $t=\tan x$

$\Leftrightarrow t^3-t^2-3t+3=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

**Bài 3.**

a. Chia hai vế cho $\cos^3 x\neq 0$ ta có

$1+\tan^3 x=1+\tan^2 x-\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$. Đặt $t=\tan x$

$\Leftrightarrow 2t^3-t^2+t=0\Leftrightarrow t\left(t^2-t+1\right)=0\Leftrightarrow t=0$

$\Leftrightarrow x=k\pi, k\in \mathbb{Z}$.

b. Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$

Ta có $\tan^2 x(\tan x+1)=3\tan x(1-\tan x)+3\left(1+\tan^2 x\right)$

Đặt $t=\tan x$ thì $t^2(t+1)=3t(t-1)+3\left(1+t^2\right)$

$$\Leftrightarrow t^3+t^2-3t-3=0\Leftrightarrow (t+1)\left(t^2-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in \mathbb{Z}.$$

**Bài 4.** a. Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \cot x + 2\cot^3 2x \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} + \frac{2}{\tan^3 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} + \frac{2}{\left(\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)^3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} + \frac{\left(1-\tan^2 x\right)^3}{8\tan^3 x}$$

Đặt $t = \tan x$, ta có $t = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\left(1-t^2\right)^3}{8t^3} \Leftrightarrow t^6 + 5t^4 - 5t^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)\left(t^4+6t^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\\ t = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Chia hai vế cho $\cos^3 x$ và đặt $t = \tan x$ ta có:

$$t^3 - \sqrt{3}t^2 - t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left[t^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)t - \sqrt{3}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1\\ t = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a. Chia hai vế cho $\cos^3 x$ và đặt $t = \tan x$

Nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(1 \pm \sqrt{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Điều kiện $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases}$

$$3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x.\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan 2x - \tan 3x\right) = \left(\tan 3x.\tan 2x + 1\right)\tan 3x$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{3\left(\tan 2x - \tan 3x\right)}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 3\tan(-x) = -3\tan x$$

$\dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = -3\tan x$ Đặt $t = \tan x$

$$\Leftrightarrow 2t\left(5t^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0\\ t = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) + k\pi\end{array}\right.$$

**Bài 6.**

a. $2\left(\cot^2 x+\tan^2 x\right)+5(\cot x+\tan x)+4=0$

Đặt $t=\cot x+\tan x \Rightarrow |t|\geq 2$

Ta có: $2t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-\dfrac{1}{2}(\text{loại}) \end{array}\right.$

$\cot x+\tan x=-2 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

b. Điều kiện $\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \tan x\neq -1 \end{cases}$

$\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=1-\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$. Đặt $t=\tan x$ với $t\neq -1$ ta được:

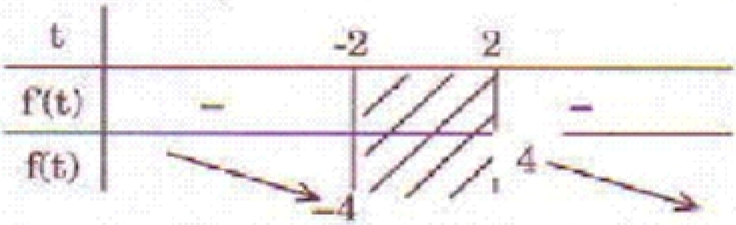
$$\frac{1-t}{1+t}=\frac{t^2-2t+1}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{(t-1)2t^2}{(1+t)\left(1+t^2\right)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

**Bài 7.** a. Ta có: $3\left(\cot^2 x+\tan^2 x\right)+m(\tan x+\cot x)+2=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x \Rightarrow |t|\geq 2$

$3t^2+mt-4=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4-3t^2}{t}=f(t)$ với $|t|\geq 2$

$f'(t)=-\left(\dfrac{4}{t^2}+3\right)<0 \Rightarrow f(t)$ nghịch biến với $|t|\geq 2$



Phương trình có nghiệm khi $|m|\geq 4$.

b. Điều kiện $\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \tan^2 x\neq 1 \\ \cos 2x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Ta có $\dfrac{m^2}{1-\tan^2 x}=\dfrac{\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}+m^2-2}{\dfrac{1}{1+\tan^2 x}-\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}=\dfrac{\tan^2 x+\left(m^2-2\right)\left(1+\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x}$

$\Leftrightarrow m^2 = \tan^2 x + (m^2-2)\tan^2 x + m^2 - 2$

$\Leftrightarrow (m^2-1)\tan^2 x = 2$

Phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} m^2-1>0 \\ m^2-1\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2>1 \\ m^2\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m|>1 \\ m\neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

**Bài 8.**

Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\in \mathbb{Z}$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$.

Ta có $(\tan x - 1)(\tan^2 x - 2m\tan x + 4m - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan^2 x - 2m\tan x + 4m - 3 = 0 \end{array}\right.$

a. Khi m = 2 thì ta có $\left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan^2 x - 4\tan x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b. Đặt $t = \tan x$ ta có $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 (*) \end{array}\right.$

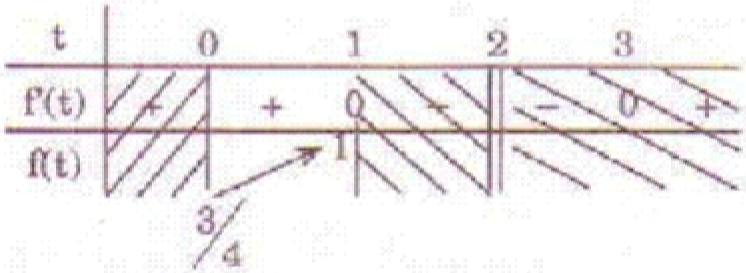
Để phương trình có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ thì phương trình (*) có nghiệm t = 1 hoặc vô nghiệm trên $[0;1]$

+ Phương trình (*) có nghiệm t = 1 nên $2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

+ Phương trình (*) vô nghiệm trên $[0;1]$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2-3}{2t-4}, t\in[0;1]$

$f'(t) = \dfrac{t^2-4t+3}{2(t-2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$



$f(0) = \dfrac{3}{4}$ và $f(1) = 1$

Phương trình (*) vô nghiệm trên $[0;1]$ khi $m < \dfrac{3}{4}$ hoặc $m > 1$

+ Kết luận: $m < \dfrac{3}{4}$ hoặc $m \geq 1$.

**Bài 9.**

Ta có: $\tan x - \tan\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (1). Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{2t}{1-t^2} - t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3t^3 + 2\sqrt{3}t^2 + 3t - 2\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(3t^2 + 3\sqrt{3}t + 6\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Do x là một góc nhọn nên $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

Tam giác ABC cân có một góc bằng $60^0$ nên $\Delta ABC$ đều.

## §3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT – THUẦN NHẤT BẬC HAI – ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

### I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

Dạng của phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$

***Phương pháp giải.***

1. Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$
2. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. Đặt $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ thì $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \vee \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ thì $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4. Biến đổi về dạng $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \vee \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**Cách khác.** 1. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ thì $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2. Biến đổi về dạng phương trình bậc hai theo ẩn t

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\dfrac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$.

b. $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ *(Khối D– 2007).*

**Giải**

a. Điều kiện:

$$2\cos^2 x+\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq -1\\ \cos x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pi+n2\pi\\ x\neq\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases};n,k\in Z$$

$$\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x}{\cos 2x+\cos x}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos x(\cos 2x+\cos x)}{\cos 2x+\cos x}=\frac{3-\sqrt{3}\sin x}{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+3\cos x=3$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi \qquad k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (\text{loại})\, k\in Z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in Z.$$

b. $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in Z.$$

**Bài 2.** Tìm các giá trị m để các phương trình sau có nghiệm

a. $\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=m$.

b. $2m(\cos x+\sin x)=2m^2+\cos x-\sin x+\dfrac{3}{2}$.

**Giải**

a. Ta có: $\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=m$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}(1-\cos 2x)}{2}+\frac{\sin 2x}{2}=m\Leftrightarrow\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2m-\sqrt{3}$$

có nghiệm khi:

$$1+\left(-\sqrt{3}\right)^2 \ge \left(2m-\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(2m-\sqrt{3}\right)^2 \le 4 \Leftrightarrow \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \le m \le \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

b. Ta có $2m(\cos x+\sin x) = 2m^2+\cos x-\sin x+\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow (2m+1)\sin x+(2m-1)\cos x = 2m^2+\frac{3}{2}$$

có nghiệm khi

$$(2m+1)^2+(2m-1)^2 \ge \left(2m^2+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(2m^2-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2m^2-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}.$$

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\dfrac{\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+\sin x-1}=\sqrt{3}$.

b. $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$.

c. $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

d. $3\cos x+4\sin x+\dfrac{6}{3\cos x+4\sin x+1}=6$.

e. $2\cos x-|\sin x|=1$.

f. $3\sin x+2|\cos x|-2=0$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

a. $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$.

b. $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$.

c. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$.

d. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$.

**Bài 3.** Tìm các giá trị m để các phương trình sau có nghiệm

a. $m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}$.

b. $(2m-1)\sin x+(m-1)\cos x=m-3$.

**Bài 4.** Cho phương trình $\dfrac{5+4\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\dfrac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

a. Giải phương trình khi $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

b. Tìm $\alpha$ để phương trình có nghiệm.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. Điều kiện: $2\cos^2x+\sin x-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có: $\cos x-\sin 2x=\sqrt{3}(\cos 2x+\sin x)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in Z\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in Z.$$

b. $4\left(\sin^4x+\cos^4x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

$$\Leftrightarrow 4\left[\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2-2\sin^2x\cos^2x\right]+\sqrt{3}\sin 4x=2$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=-1\Leftrightarrow\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in Z.$$

c. $\sin^4x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\dfrac{1+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\dfrac{1}{4}$

$\cos x+2\sin 2x-\cos 3x=1+2\sin x-\cos 2x$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in Z.$$

d. Đặt $t=3\cos x+4\sin x$, ta có $t+\dfrac{6}{t+1}=6\Leftrightarrow t^2-5t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=5\end{array}\right.$

* $3\cos x+4\sin x=0\Leftrightarrow\tan x=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)+k\pi,k\in Z$

* $3\cos x+4\sin x=5\Leftrightarrow\dfrac{3}{5}\cos x+\dfrac{4}{5}\sin x=1$. Đặt $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$.

Ta có: $\cos(x-\varphi)=1\Rightarrow x=\varphi+k2\pi=\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)+k2\pi,k\in Z$.

e. $2\cos x-|\sin x|=1 \Leftrightarrow |\sin x|=2\cos x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x-1\ge 0\\ \sin^2 x=(2\cos x-1)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\ge \dfrac{1}{2}\\ \cos x(5\cos x-4)=0\end{cases} \Leftrightarrow \cos x=\frac{4}{5} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+k2\pi, k\in Z.$$

f. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ta có $\dfrac{6t}{1+t^2}+2\dfrac{|1-t^2|}{1+t^2}-2=0$

$$\Leftrightarrow |1-t^2|-1-t^2+3t=0 \text{ và } |1-t^2|=\begin{cases}1-t^2, & -1\le t\le 1\\ -1+t^2, & t<-1 \vee t>1\end{cases}.$$

- Khi $t<-1$ ta có:

  $|1-t^2|-1-t^2+3t=0 \Leftrightarrow -1+t^2-1-t^2+3t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$ (loại)

- Khi $-1\le t\le 1$ ta có $2t^2-3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=k2\pi, k\in Z$

- Khi $t>1$ ta có: $t=\dfrac{2}{3}$ (loại).

**Bài 2.** a.

$3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x \Leftrightarrow 3\sin 3x-4\sin^3 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1$

$\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{9}; x=\dfrac{7\pi}{54}+\dfrac{k2\pi}{9}, k\in Z.$

b. $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)^2-4(\cos x-\sin x)-5=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=-1\\ \cos x-\sin x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

c. Ta có $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x \Rightarrow 4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \Rightarrow 4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$ thay vào phương trình, ta có:

$(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x+(\cos 3x+3\cos x)\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$

$\Leftrightarrow 3(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)+3\sqrt{3}\cos 4x=3 \Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}; x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z.$

d. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}\cos^2 x=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x+(\sqrt{2}-1)\cos 2x=3-\sqrt{2}$

Ta có $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-1)^2=5-2\sqrt{2}<(3-\sqrt{2})^2$

Suy ra, phương trình vô nghiệm.

**Bài 3.** a. Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

Ta có: $m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}\Leftrightarrow m\sin x\cos x+(m+1)\cos^2 x=m$

$$\Leftrightarrow m\sin 2x+(m+1)\cos 2x=m-1$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\begin{cases}m^2+(m+1)^2\geq(m-1)^2\\ m\sin(\pi+k2\pi)+(m+1)\cos(\pi+k2\pi)\neq m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m\geq 0\\ m\neq 0\end{cases}.$$

$\Leftrightarrow m\leq -4$ hoặc $m>0$.

b. $|m|\geq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

**Bài 4.** Ta có $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$ và $\dfrac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=3\sin 2\alpha$

a. Khi $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ ta có $\dfrac{5-4\cos x}{\sin x}=-3\Leftrightarrow 4\cos x-3\sin x=5$

$\Leftrightarrow x=\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)+k2\pi, k\in Z$.

b. Ta có $\dfrac{5-4\cos x}{\sin x}=3\sin 2\alpha\Leftrightarrow 3\sin x\sin 2\alpha+4\cos x=5$ có nghiệm

$\Leftrightarrow(3\sin 2\alpha)^2+16\geq 25\Leftrightarrow\sin^2 2\alpha\geq 1\Rightarrow\sin^2 2\alpha=1$

$\Leftrightarrow\cos 2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

## II. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX.

Dạng của phương trình: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

***Phương pháp giải.***

1. **Cách 1:** Áp dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos2x}{2};\ \sin x\cos x = \frac{\sin2x}{2}$$

và biến đổi phương trình đưa về dạng: $a_1\cos2x + b_1\sin2x = c_1$.

2. **Cách 2:** Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ với $\cos x \neq 0$ và biến đổi phương trình đưa về dạng: $f(\tan x) = 0$.

3. Đối với các phương trình đẳng cấp bậc ba, bậc bốn ta áp dụng cách giải 2.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 2x - 7\sin4x + 3\sin^2 2x = -3$.

b. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$. *(Khối B– 2008)*

**Giải**

a. Ta có $\cos^2 2x - 7\sin4x + 3\sin^2 2x = -3$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 7\sin4x + 3\sin^2 2x = -3\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 7\sin2x\cos2x + 3\sin^2 2x = 0$ và $\cos2x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\cos^2 2x$:

$$2\tan^2 2x - 7\tan2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan2x = 3\\ \tan2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{2}\arctan(3) + k\pi\\ x = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. Ta có $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$: $\tan^3 x + \sqrt{3}\tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm1\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.** Tìm các giá trị m để các phương trình sau có nghiệm

a. $(5m-2)\cos^2x-(m+1)\sin 2x=-1$.

b. $(m+3)\sin^2x+(m+3)\cos x\sin x+\cos^2x=0$.

**Giải**

a. Ta có: $(5m-2)\cos^2x-(m+1)\sin 2x=-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5m-2)(1+\cos 2x)}{2}-(m+1)\sin 2x=-1$

$\Leftrightarrow (5m-2)\cos 2x-2(m+1)\sin 2x=-5m$ có nghiệm.

Suy ra: $(5m-2)^2+4(m+1)^2\ge(-5m)^2 \Leftrightarrow m^2-3m+2\ge 0 \Leftrightarrow m\le 1 \vee m\ge 2$.

b. $(m+3)\sin^2x+(m+3)\cos x\sin x+\cos^2x=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m+3)(1-\cos 2x)}{2}+\dfrac{(m+3)\sin 2x}{2}+\dfrac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow (m+2)\cos 2x-(m+3)\sin 2x=m+4$ có nghiệm.

Suy ra: $(m+2)^2+(m+3)^2\ge(m+4)^2 \Leftrightarrow m^2+2m-3\ge 0 \Leftrightarrow m\le -3 \vee m\ge 1$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2x$.

b. $\dfrac{1}{\cos(x+10^0)}=4\sin(x+10^0)+6\cos(x+10^0)$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^3x+\sin^2x\cos x-2\sin x\cos^2x-\cos^3x=0$.

b. $3\cos^4x-4\sin^2x\cos^2x+\sin^4x=0$.

**Bài 3.** Tìm các giá trị của m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $(1-m)\sin^2x+\sin 2x+(1+m)\cos^2x=0$.

b. $(\sin x+m\cos x)(\sin x+2m\cos x)=2$.

**Bài 4.** Cho phương trình $\cos^2x-\sin x\cos x-2\sin^2x-m=0$

a. Giải phương trình khi m = 1.

b. Tìm các giá trị m để phương trình có nghiệm.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. $\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2x \Leftrightarrow \cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\sin^2x+\cos^2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x+\sqrt{3}\sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \tan x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

b. Điều kiện: $\cos\left(x+10^0\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 80^0+k180^0, k\in Z$

Ta có: $\dfrac{1}{\cos(x+10^0)}=4\sin(x+10^0)+6\cos(x+10^0)$

$\Leftrightarrow \sin^2\left(x+10^0\right)-4\sin(x+10^0)\cos(x+10^0)-5\cos^2(x+10^0)=0.$

Chia hai vế của phương trình cho $\cos\left(x+10^0\right)$, ta có:

$$\tan^2\left(x+10^0\right)-4\tan\left(x+10^0\right)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\left(x+10^0\right)=-1\\ \tan\left(x+10^0\right)=5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\left(x+10^0\right)=-1\\ \tan\left(x+10^0\right)=5=\tan\alpha^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-55^0+k180^0\\ x=\alpha^0-10^0+k180^0\end{array}\right., k\in Z.$$

**Bài 2.** a. Chia hai vế cho $\cos^3x$, ta có:

$$2\tan^3x+\tan^2x-2\tan x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\pm 1\\ \tan x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

b. Chia hai vế cho $\cos^4x$, ta có:

$$\tan^4x-4\tan^2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\pm 1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

**Bài 3.** a. Ta có $(1-m)\sin^2x+\sin 2x+(1+m)\cos^2x=0$

$\Leftrightarrow 2m\cos 2x+2\sin 2x+1=0$ vô nghiệm.

Suy ra: $(2m)^2+4<1 \Leftrightarrow 4m^2+3<0 \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

b. Ta có $(\sin x+m\cos x)(\sin x+2m\cos x)=2$

$\Leftrightarrow \sin^2x+3m\sin x\cos x+2m^2\cos^2x=2$

$\Leftrightarrow \left(2m^2-1\right)\cos 2x+3m\sin 2x=3-2m^2$ vô nghiệm.

Suy ra: $(2m^2-1)^2+(3m)^2<(3-2m^2)^2 \Leftrightarrow m^2<\frac{8}{17} \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}<m<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

**Bài 4.** a. $x=k\pi;\ x=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi,\ k\in Z$

b. $\frac{-2-\sqrt{38}}{4}\le m\le\frac{-2+\sqrt{38}}{4}$

## III. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX.

Dạng của phương trình: $a(\cos x\pm\sin x)+b\sin x\cos x+c=0$

***Phương pháp giải.***

1. Xét phương trình $a(\cos x+\sin x)+b\sin x\cos x+c=0$

– Đặt $t=\sin x+\cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

– $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

– Phương trình biến đổi thành: $bt^2+2at+2c-b=0$

2. Xét phương trình $a(\cos x-\sin x)+b\sin x\cos x+c=0$

– Đặt $t=\cos x-\sin x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

– $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

– Phương trình biến đổi thành: $-bt^2+2at+2c+b=0$

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=2$

b. $\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{10}{3}$

**Giải**

a. Đặt $t=\sin x+\cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

. Ta có: $t^2+4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5\ \ \text{(loại)}\end{array}\right.$

$$\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in Z.$$

b. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \sin x\neq m\pi\end{cases};k,m\in Z\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2};k\in Z$

Ta có: $3(\cos x+\sin x)(\cos x\sin x+1)-10\cos x\sin x=0$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

(1) $\Leftrightarrow 3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow(t-2)\left(3t^2-4t-5\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}\end{array}\right.$ và $t=\frac{2+\sqrt{19}}{3}$, $t=2$ (loại)

$\sin x+\cos x=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\right)+k2\pi,k\in Z.$

**Bài 2.** Tìm các giá trị m để các phương trình sau

a. $\sin 2x+4(\cos x-\sin x)=m$ có nghiệm

b. $m(\sin x+\cos x+1)=1+2\sin x\cos x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

**Giải**

a. Đặt $t=\cos x-\sin x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

Ta có: $-t^2+4t+1=m$ và xét hàm số $f(t)=-t^2+4t+1$ với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$f\ (t)=-2t+4>0$ với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ và $f(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}-1$, $f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-3$

Phương trình có nghiệm khi:
$f(-\sqrt{2})\le m\le f(\sqrt{2})\Leftrightarrow-4\sqrt{2}-1\le m\le 4\sqrt{2}-3$

b. Đặt $t=\sin x+\cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Ta có: $m(t+1)=t^2$ (2)

Với $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in \left[1;\sqrt{2}\right]$

Phương trình $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + 2\sin x\cos x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì phương trình $m(t+1) = t^2$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t+1}$ với $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$

và $f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} > 0$ với $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$

$f(1) = \frac{1}{2}$ và $f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)$.

Suy ra: $f(1) \le m \le f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le m \le 2(\sqrt{2}-1)$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = 1$ b. $\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\sin x\cos x}$

c. $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$ d. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

a. $(1+\sin x)(1+\cos x) = 2$

b. $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$

c. $\sin x\cos x + |\sin x + \cos x| = 1$

**Bài 3.** Tìm các giá trị m để các phương trình sau có nghiệm

a. $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = m$ b. $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

**Bài 4.** Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$

a. Giải phương trình khi $m = -1$.

b. Tìm các giá trị m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

**Bài 5.** Cho phương trình: $\cos x + \sin x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \tan x + \cot x = m$

a. Giải phương trình khi $m = -2$.

b. Tìm các giá trị m để phương trình vô nghiệm.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\sin 2x = 1$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Ta có: $t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$.

b. Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Ta có: $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$. Suy ra: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in Z$

c. $1+\sin^3 x+\cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x \Leftrightarrow 1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x) = \frac{3}{2}\sin 2x$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Ta có:

$$t^3+3t^2-3t-5=0 \Leftrightarrow (t+1)\left(t^2+2t-5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-1+\sqrt{6}>\sqrt{2} \\ t=-1-\sqrt{6}<-\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow t=-1$$

Suy ra: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in Z$.

d. $\sin^3 x+\cos^3 x = \sin 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x) = \sin 2x+\sin x+\cos x$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Ta có: $t^3+2t^2-5t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+3t-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

nên $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Suy ra: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi, k \in Z$.

**Bài 2.** a. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi, k \in Z$

b. Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ với điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$

thì $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

Ta có: $4t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{4} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$. Suy ra: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

c. Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ với điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$ thì

$\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. Suy ra: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

**Bài 3.** a. Xét hàm số $y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$

Điều kiện: $\begin{cases} 1+2\cos x \ge 0 \\ 1+2\sin x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge -\frac{1}{2} \\ \sin x \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

và $y^2 = 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right]$

$f(t) = 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}$,

$f'(t) = 2 + \frac{2(2t+1)}{\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0$ với $t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right]$

$\max f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = 4\left(1+\sqrt{2}\right)$ và $\min f(t) = f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$

Phương trình có nghiệm khi: $\sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

b. Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ với điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$ thì

$\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

Ta có: $-4t^2 + t + 4 = m$ và xét hàm số $f(t) = -4t^2 + t + 4$ với $0 \le t \le \sqrt{2}$

$f'(t) = -8t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{8}$ và $f(0) = 4$,

$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 4$, $f\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{61}{16}$

Phương trình có nghiệm khi: $f\left(\sqrt{2}\right) \le m \le f\left(\dfrac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 4 \le m \le \dfrac{61}{16}$.

**Bài 4.** Ta có $\cos^3 x - \sin^3 x = m \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = m$

a. Khi m = − 1 ta có nghiệm của phương trình:

$x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pi + k2\pi,\ k \in Z$

b. Đặt $t = \cos x - \sin x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$

Ta có: $-t^3 + 3t = 2m\quad (*)$. Gọi t là một nghiệm của (*) thoả mãn: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó, xét phương trình: $t = \cos x - \sin x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

$g(x) = \cos x - \sin x = -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$g'(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0, \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

$g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ và $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ nên phương trình: $t = \cos x - \sin x$ có đúng một nghiệm trên $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ với $0 \le t \le \sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t$ với $0 \le t \le \sqrt{2}$ và $f'(t) = -3t^2 + 3$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \notin \left[0; \sqrt{2}\right] \end{array}\right.$ và $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ và

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì phương trình (*) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \sqrt{2}\right]$. Suy ra: $\sqrt{2} < 2m < 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$.

**Cách khác.** Xét hàm số $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$

$f'(x) = -3\cos^2 x\sin x - 3\sin^2 x\cos x$

$= -\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ và $f(0) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

| x | $-\frac{\pi}{4}$ | | 0 | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$.

**Bài 5.** Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ thì $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Do $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow t \ne \pm 1$. Khi đó: $t^2 - t + 2 = m(t-1)$

a. Khi m = − 2 thì nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

b. $t^2 - t + 2 = m(t-1) \Leftrightarrow \frac{t^2 - t + 2}{t - 1} = m$ ( do $t \ne 1$ ) và xét hàm số

$f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t - 1}$ và $f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 1}{(t-1)^2}$,

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$

| t | $3\sqrt{2} + 2$ | | $1 - \sqrt{2}$ | | 1 | | $\sqrt{2}$ | | $1 + \sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | | + | 0 | − | ‖ | − | | + | |
| f(t) | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ↗ | $-2\sqrt{2}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3\sqrt{2} + 2$ | | |

Phương trình vô nghiệm khi: $-2\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2} + 2$.

# §4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

## Dạng 1. Phương trình dạng tích bằng không.

***Phương pháp:***

1. *Biến đổi phương trình đưa về dạng* $A(x).B(x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{array}\right.$$

2. *Khi biến đổi thường sử dụng một số nhóm các công thức lượng giác. Dựa vào nhóm công thức biến đổi, chúng ta có thể phân thành các loại sau:*

*Loại 1: Áp dụng nhóm công thức hạ bậc và biến đổi tổng thành tích*

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\sin^2 x+\sin^2 3x=2\sin^2 2x$

b. $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ *(Khối B – 2002)*

**Giải**

a. Ta có: $\sin^2 x+\sin^2 3x=2\sin^2 2x \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos 6x}{2}=1-\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 6x=2\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x-2\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x=0 \\ \cos 2x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4} \\ x=k\pi \end{array}\right., k\in \mathbb{Z}.$$

b. Ta có: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 11x.\cos x-2\cos 7x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0 \Leftrightarrow \cos x\sin 9x\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin 2x=0 \\ \sin 9x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right., k\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right., k\in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

b. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

**Giải**

a. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + 2\cos 2x.\cos 4x + 2\cos^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(4\cos^2 4x + 2\cos 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] + k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 6x) + (\sin 2x + \sin 5x) + (\sin 3x + \sin 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left(2\cos\frac{3x}{2}.\cos x + \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{7x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{7x}{2} = k\pi \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2k\pi}{7} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

b. $\sin^2 + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

a. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

b. $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau

a. $\sin^2 1{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2{,}5x\right) = \sin^2 5{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6{,}5x\right)$

b. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau

a. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

b. $\sin\frac{x}{2} - \left(\sin x + \sin\frac{3x}{2}\right) = 0$

**Bài 5.** Giải các phương trình sau

a. $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 10x\right)$

b. $\sin x + \cos 2x - \cos 4x = 0$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

b. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

**Bài 2.**

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$; $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**Bài 3.**

a. $$\sin^2 1,5x+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2,5x\right)=\sin^2 5,5x+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6,5x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos 11x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-13x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x+\sin 5x=\cos 11x+\sin 13x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x-\cos 11x+\sin 5x-\sin 13x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 7x.\sin(-4x)+2\cos 9x.\sin(-4x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x(\sin 7x-\cos 9x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ \sin 7x=\cos 9x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ \sin 7x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-9x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8}\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

b. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

**Bài 4.**

a. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

b. $$\sin\frac{x}{2}-\left(\sin x+\sin\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos x+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}=-1\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-2\pi+k4\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a. $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 10x\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 16x}{2} = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{2} + 10x\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 16x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 10x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 16x = -2\cos 10x$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x.\cos 6x = -2\cos 10x$

$\Leftrightarrow \cos 10x(\cos 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 10x = 0\\ \cos 6x = -1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}\\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

b. $\sin x + \cos 2x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2\sin 3x.\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(1 + 2\sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin 3x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\\ x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

*Loại 2: Áp dụng các đẳng thức sau để biến đổi*

1. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$
2. $1 \pm \sin 2\alpha = (\cos\alpha \pm \sin\alpha)^2 = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$
3. $\cos^3\alpha \pm \sin^3\alpha = (\cos\alpha \pm \sin\alpha)(1 \mp \sin\alpha\cos\alpha)$
4. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$
5. $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

b. $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

**Giải**

a. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2}=-1\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{2}+k4\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b. Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x-\sin x)}{\cos x}(\cos x+\sin x)^2=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos 2x=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x$ (*Khối A – 2007*)

b. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ (*Khối A – 2008*)

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ b. $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin 2x$

**Giải**

a. $\cos^3 x + \sin^3 x - \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x - \cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. ,k \in \mathbb{Z}$$

b) $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos^3 x - \sin^3 x + 1 - \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) + (\cos x - \sin x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x + \cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \cos x - \sin x + \sin x \cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos x - \sin x + \cos x \sin x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Đặt: $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3(\text{loại}) \end{array}\right.$

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. , k \in Z$$

Nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$

b. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $(\cos x - \sin x)\sin x\cos x = \cos x\cos 2x$

b. $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

b. $\sin x\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{7}{2}$ với điều kiện $|x - 1| < 3$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

b. $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ *(Khối D – 2003)*

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ *(Khối B – 2007)*

b. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

a. $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \tan x - 1 = 1 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x}\right) = (\cos x - \sin x)^2$ với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. **Điều kiện:** $2\cos x - \sin x \neq 0$

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{2\cos x - \sin x} - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.**

a. $(\cos x - \sin x)\sin x \cos x = \cos x \cos 2x$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\sin x \cos x = \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 3.**

a. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Ta có: $\sin x \cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 4x - \frac{1 - \cos 4x}{2} = 2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\cos 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 4x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ta có $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{7\pi}{6}$.

**Bài 4.**

a. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b. **Điều kiện:** $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow(1-\sin x)\sin^2 x=(1+\cos x)\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1-\cos^2 x)=(1+\cos x)(1-\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a. $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

$$\Leftrightarrow\sin 7x-\sin x+2\sin^2 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\sin 3x-\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x(2\sin 3x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \sin 3x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 3x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

b. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

*Loại 3: Áp dụng nhóm công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức biến đổi tích thành tổng để tìm nhân tử chung.*

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$ b. $\cos^4 x-\cos 2x+2\sin^6 x=0$

**Giải**

a. $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1\Leftrightarrow 4\cos x-2\cos 2x-(1+\cos 4x)=0$

$\Leftrightarrow 4\cos x-2\cos 2x-2\cos^2 2x=0\Leftrightarrow 4\cos x-2\cos 2x(1+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 4\cos x-4\cos 2x\cos^2 x=0\Leftrightarrow \cos x(1-\cos 2x\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2-\cos x-\cos 3x)=0\Leftrightarrow \cos x\left(2+2\cos x-4\cos^3 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-1)\left(2\cos^2 x+2\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

b. $\cos^4 x-\cos 2x+2\sin^6 x=0$

$\Leftrightarrow \cos^4 x-1+1-\cos 2x+2\sin^6 x=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-1\right)\left(\cos^2 x+1\right)+2\sin^2 x+2\sin^6 x=0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x\left(\cos^2 x+1\right)+2\sin^2 x\left(1+\sin^4 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left[2\sin^4 x-\cos^2 x-1+2\right]=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(2\sin^4 x+\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $3\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2 x=\dfrac{3\left(\sin^4 x+\cos^4 x-1\right)}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$

b. $(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=3-4\cos^2 x$

**Giải**

a. Ta có: $\sin^4 x+\cos^4 x-1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-1$

$$=-2\sin^2 x\cos^2 x=-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

$\cos^6 x+\sin^6 x-1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)-1$

$$=-3\sin^2 x\cos^2 x=-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Điều kiện: $\sin^2 2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $3\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2 x=2$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\left(1-\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0 \text{ (loại)}\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

b. Ta có: $3-4\cos^2 x=3-4(1-\sin^2 x)=4\sin^2 x-1$

Suy ra: $(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=4\sin^2 x-1$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left(2\sin 2x-2\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x-1)\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 3. Giải các phương trình sau:**

a. $\tan^2 2x\tan^2 3x\tan 5x=\tan^2 2x-\tan^2 3x+\tan 5x$

b. $3\tan^3 x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$

### Giải

a. Ta có: $\tan^2 3x-\tan^2 2x=\tan 5x(1-\tan^2 2x\tan^2 3x)$

* Khi $1-\tan^2 2x\tan^2 3x=0 \Rightarrow \tan^2 3x=\tan^2 2x=1 \Rightarrow x\in\varnothing$

$\Rightarrow 1-\tan^2 2x.\tan^2 3x\neq 0$. Khi đó: $\tan 5x=\frac{\tan^2 3x-\tan^2 2x}{1-\tan^2 2x\tan^2 3x}$

$$\Leftrightarrow \tan 5x=\frac{(\tan 3x-\tan 2x)}{(1+\tan 2x\tan 3x)}.\frac{(\tan 3x+\tan 2x)}{(1-\tan 2x\tan 3x)}$$

$$\Leftrightarrow \tan 5x=\tan x.\tan 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan 5x=0\\ \tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}.$

b. Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$3\tan^3 x - \tan x + \frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + 3(1+\sin x)(1+\tan^2 x) - 8\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + 3(1+\sin x)(1+\tan^2 x) - 4(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + (1+\sin x)(3\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\tan x + 1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = \frac{1}{3} \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi$$

Nghiệm của phương trình $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$

b. $\sqrt{(1+\cos x)\tan x} - \sqrt{\tan x - \sin x} = 2\cos x\sqrt{\tan x}$

**Giải**

a. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \ge 0 \\ \sin x + \cos x \ge 0 \end{cases}$ (*)

$$\sqrt{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

* Nếu $\cos x+\sin x=0\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$

* Nếu $\cos x+\sin x>0\Rightarrow \cos x-\sin x\ge 0$

Ta có: $\sqrt{\cos x+\sin x}\left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}=2$

$\Leftrightarrow 2\cos x+2\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}=2-\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-4\cos x+4$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+4\cos x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-5\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k2\pi,\ k\in Z.$

* Nghiệm của phương trình $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=k2\pi,\ k\in Z$

b. Điều kiện: $\begin{cases}\tan x\ge 0\\ \tan x-\sin\ge 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x\ge 0\\ \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}\ge 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan\ge 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}$ (*)

* Ta có $x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z$ là nghiệm của phương trình

* Khi $\tan x>0$ thì $\sqrt{(1+\cos x)\tan x}-\sqrt{(1-\cos x)\tan x}=2\cos x\sqrt{\tan x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}=2\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}=(1+\cos x)-(1-\cos x)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(1-\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}=0\\ \sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\cos x=1-\cos x\\ 2+2\sqrt{1-\cos^2 x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2+2|\sin x|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2|\sin x|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Nghiệm của phương trình: $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 5.** Tìm các giá trị của m để các phương trình:

a. $\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0$ có đúng 7 nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$

b. $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$

b. $\left|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x\right| = 1 + 2\sin x - \cos 2x$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^5 x + \sin^7 x + \frac{1}{2}\left(\cos^3 x + \sin^5 x\right)\sin 2x = \cos x + \sin x$

b. $\sin^8 x + \cos^8 x = 2\left(\sin^{10} x + \cos^{10} x\right) + \frac{5}{4}\cos 2x$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a. $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$

b. $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a. $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \frac{2}{\sin 4x}$

b. $\tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x.\tan 3x.\tan 5x$

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

a. $3\tan 6x - 2\tan 2x = \frac{2}{\sin 8x} - \cot 4x$

b. $\tan^2 x.\cot^2 2x.\cot 3x = \tan^2 x - \cot^2 2x + \cot 3x$

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

a. $3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x.\tan 2x$

b. $\tan^2 x - \tan x.\tan 3x = 2$

**Bài 7.** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$

b. $\left(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$

**Bài 8.** Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$

b. $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$

**Bài 9.** Tìm các giá trị của m để các phương trình sau

a. $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=3-4\cos^2 x$ có đúng hai nghiệm thuộc $(0;\pi)$

b. $(4-6m)\sin^3 x+3(2m-1)\sin x+2(m-2)\sin^2 x\cos x-(4m-3)\cos x=0$ có đúng một nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

**Bài 10.** Tìm các giá trị của m để các phương trình sau

a. $\sin 2x+m=\sin x+2m\cos x$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$

b. $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=m(\sin x+\cos x)$ có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

a. Điều kiện: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$3\sin x+2\cos x=2+3\tan x\Leftrightarrow 2(1-\cos x)+\frac{3\sin x(1-\cos x)}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos x)(2\cos x+3\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \tan x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{2}{3}\right)+k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

b. $|\cos x+2\sin 2x-\cos 3x|=1+2\sin x-\cos 2x$

$\Leftrightarrow|2\sin 2x+2\sin 2x\sin x|=2\sin^2 x+2\sin x$

$\Leftrightarrow|\sin 2x(\sin x+1)|=\sin(\sin x+1)$

+ $\sin x+1=0\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

+ Khi sinx + 1 > 0 thì: $|\sin 2x| = \sin x \Leftrightarrow |2\sin x\cos x| = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \begin{cases}\sin x > 0\\ \cos x = \pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ \begin{cases}\sin x > 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x > 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$;

$$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.**

a. $\cos^5 x + \sin^7 x + \dfrac{1}{2}\left(\cos^3 x + \sin^5 x\right)\sin 2x = \cos x + \sin x$

$$\Leftrightarrow \cos^5 x + \sin^7 x + \left(\cos^3 x + \sin^5 x\right)\sin x\cos x - (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x(\cos x + \sin x) + \sin^6 x(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(\sin^6 x + \cos^4 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \sin^6 x + \cos^4 x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ \sin^6 x + \cos^4 x = 1\end{array}\right.$$

Ta có $|\cos x| \le 1 \Rightarrow \cos^4 x \le \cos^2 x$, $\forall x \in R$

$|\sin x| \le 1 \Rightarrow \sin^6 x \le \sin^2 x$, $\forall x \in R$

$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^4 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\forall x \in R$

$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^4 x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

Nghiệm của phương trình: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

b. $\sin^8 x+\cos^8 x=2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos^8 x\left(1-2\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 x.\cos 2x-\cos^8 x.\cos 2x-\frac{5}{4}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin^8 x-\cos^8 x-\frac{5}{4}\right)=0$

Ta có: $\sin^8 x\le 1<\frac{5}{4}+\cos^8 x$

$\Rightarrow \sin^8 x-\cos^8 x-\frac{5}{4}\ne 0,\forall x\in \mathbb{R}$

Suy ra: $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in \mathbb{Z}$

**Bài 3.**

a. $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\left(1-\sin^2 x\right)=3$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)-\left(4\sin^2 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{2}\\ \cos 4x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in \mathbb{Z}.$$

b. $4\sin 2x-3\cos 2x=3(4\sin x-1)$

$\Leftrightarrow 4\sin 2x-12\sin x+3(1-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 4\sin 2x-12\sin x+6\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-6\sin x+3\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(4\cos x+3\sin x-6)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 4\cos x+3\sin x=6\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi,k\in \mathbb{Z}.$$

**Bài 4.**

a. Điều kiện: $\cos 3x \neq 0, \sin 2x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$ (*)

Ta có: $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \dfrac{2}{\sin 4x}$

$$\Leftrightarrow 3(\tan 3x - \tan x) + \cot 2x + \tan x = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin 2x}{\cos 3x \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin x}{\cos 3x} + \frac{\cos x}{\sin 2x \cos x} = \frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{6\sin x}{\cos 3x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin x}{\cos 3x} = \frac{2}{\sin 4x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2(1-\cos 2x)}{\sin 4x} = \frac{4\sin^2 x}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\frac{3}{\cos 3x} - \frac{2\sin x}{\sin 4x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\cos 3x} - \frac{2\sin x}{\sin 4x} = 0 \text{ (Do } \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 2\sin x\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(6\cos x\cos 2x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x\cos 2x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x + 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x\cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} \text{ (Do } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Điều kiện: $\cos 2x\cos 3x\cos 5x \neq 0$.

$$\tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x\tan 3x\tan 5x$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x - \tan 5x = \tan 3x(1 + \tan 2x\tan 5x)$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{\tan 2x - \tan 5x}{1 + \tan 2x\tan 5x} \text{ (Do } 1 + \tan 2x\tan 5x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan(-3x) \Leftrightarrow \tan 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a. Điều kiện: $\sin 8x.\cos 6x \neq 0$

$$3\tan 6x - 2\tan 2x = \frac{2}{\sin 8x} - \cot 4x$$

$$\Leftrightarrow 3\tan 6x - 2\tan 2x = \frac{1}{\sin 4x\cos 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 3\tan 6x - 2\tan 2x = \frac{1-\cos^2 4x}{\sin 4x\cos 4x} = \frac{\sin^2 4x}{\sin 4x\cos 4x} = \tan 4x$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan 6x - \tan 2x) + \tan 6x - \tan 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 4x + \sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(4\cos 4x + 1) = 0 \text{ (Do } \sin 4x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Điều kiện: $\cos x\sin 2x\sin 3x \neq 0$

$$\tan^2 x\cot^2 2x\cot 3x = \tan^2 x - \cot^2 2x + \cot 3x$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x(\tan x\cot 2x + 1)(\tan x\cot 2x - 1) = (\tan x + \cot 2x)(\tan x - \cot 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x\frac{\sin 3x}{\cos x\sin 2x}\frac{\sin(-x)}{\cos x\sin 2x} = \frac{-\cos(-x)}{\cos x\sin 2x}\frac{\cos 3x}{\cos x\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\sin x = \cos x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 6.**

a. Điều kiện: $\cos 2x\cos 3x \neq 0$

$$3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow 3(\tan 2x - \tan 3x) = \tan 3x(1 + \tan 3x\tan 2x)$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{3(\tan 2x - \tan 3x)}{1 + \tan 3x\tan 2x} = 3\tan(-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = -3\tan x \Leftrightarrow \tan x(5\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\arctan\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. **Điều kiện:** $\cos x.\cos 3x \neq 0$

$$\tan^2 x - \tan x.\tan 3x = 2 \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x.\frac{\left(3\tan x - \tan^3 x\right)}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 7.**

a. **Điều kiện:** $\begin{cases}\cos 2x \geq 0\\ \sin x - \cos x \geq 0\end{cases}$

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$$

$+ \ \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

$+ \ \sin x - \cos x > 0$ ta có: $\sqrt{-(\sin x + \cos x)} + \sqrt{\sin x - \cos x} = 2$

$$\Leftrightarrow -\cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos 2x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = -1\\ 2\cos^2 x - 1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos^2 x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. **Điều kiện:** $\cos x \geq 0$

$$\left(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \cos 2x \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x} = \sin 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos^2 x - 1 = 0\\ 1 + 2\sqrt{(1 - \cos x)\cos x} = \sin^2 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 2\sqrt{\cos x(1 - \cos x)} = -\cos^2 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \begin{cases}\cos 2x = 0\\ \cos x = 0\end{cases} \vee \begin{cases}\cos 2x = 0\\ \cos x = 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 8.**

a. **Điều kiện:** $\begin{cases}\cos 2x \geq 0\\ \sin^3 x + \cos^3 x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x - \sin^2 x \geq 0\\ \sin x + \cos x \geq 0\end{cases}$

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x+\cos x}\left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}-\sqrt{\frac{2-\sin 2x}{2}}\right)=0$$

$+\ \sqrt{\sin x+\cos x}=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$

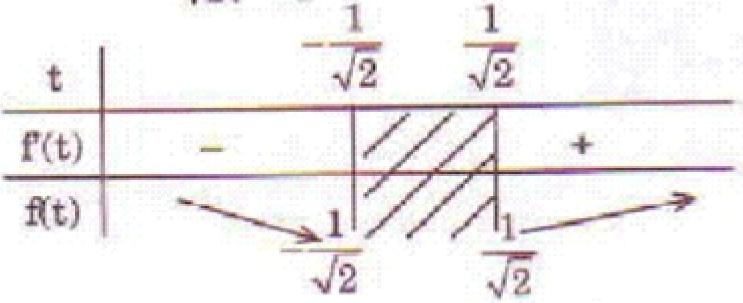
$+\ \sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}=\sqrt{\frac{2-\sin 2x}{2}}$ (*)

Ta có $\left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}\right)^2=2\cos x+2\sqrt{\cos 2x}$

$$=2\left(\cos x+\sqrt{2\cos^2 x-1}\right)$$

Xét $f(t)=t+\sqrt{2t^2-1}$ với $t=\cos x$ và $|\cos x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f'(t)=1+\frac{2t}{\sqrt{2t^2-1}}$$



Suy ra: $f(t)\ge\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\cos x+\sin x}\right)^2\ge\sqrt{2}>1$

Mặt khác: $\left(\frac{\sqrt{2-\sin 2x}}{2}\right)^2=\frac{2-\sin 2x}{4}\le\frac{3}{4}<1$

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm

Nghiệm của phương trình : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in \mathbb{Z}$.

b. $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2(1+\cos 2x)}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=4|\cos x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \cos x\left(2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-4\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ \cos x\left(2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-4\right)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

* Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* Khi $\cos x > 0$, ta có: $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ (loại)

* Khi $\cos x < 0$, ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ (loại)

Nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Bài 9.**

a. $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \frac{1-m}{2} \ (*) \end{array}\right.$$

Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \in (0;\pi)$

Suy ra phương trình $\cos 2x = \frac{1-m}{2}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$

* Phương trình (*) vô nghiệm khi $\left|\frac{1-m}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$

* Phương trình (*) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{6} = \frac{1-m}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1-m}{2} \Leftrightarrow m = 0$$

Giá trị m cần tìm: $m < -1$ hoặc $m > 3$ hoặc $m = 0$.

b. $(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$

Ta có $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$. Khi đó

$(4-6m)\tan^3x+3(2m-1)\tan x(1+\tan^2x)+2(m-2)\tan^2x-(4m-3)(1+\tan^2x)=0$

$\Leftrightarrow(\tan x-1)(\tan^2x-2m\tan x+4m-3)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\notin\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\\ \tan^2x-2m\tan x+4m-3=0\end{array}\right.$$

Đặt $t=\tan x$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$

Ta có $f(t)=t^2-2mt+4m-3$

Phương trình có đúng một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì $f(t)=0$ có đúng một nghiệm thuộc (0; 1).

Suy ra: $f(0)f(1)<0\Leftrightarrow(4m-3)(2m-2)<0\Leftrightarrow\frac{3}{4}<m<1$.

**Bài 10.**

a. $\sin2x+m=\sin x+2m\cos x$

$$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]\\ \sin x=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}\\ \sin x=m\end{array}\right.$$

Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì phương trình $\sin x=m$ có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$

Ta có $\sin0=0$ và $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $0\le m<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $2\cos2x+\sin^2x\cos x+\sin x\cos^2x=m(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(2\cos x-2\sin x+\sin x\cos x-m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \notin \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m = 0 (1)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f(t) = t^2 - 4t + 2m - 1 = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-1;1]$

Suy ra $f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow (2m+4)(2m-4) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

## Dạng 2. Phương trình dạng tổng các bình phương bằng 0.

***Phương pháp:***

**1.** *Biến đổi đưa phương trình về dạng tổng các bình phương bằng 0*

$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$ *(1)*

**2.** *Khi đó (1) tương đương với hệ phương trình* $\begin{cases} f(x) = 0\\ g(x) = 0\end{cases}$

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$

b. $x^2 - 2x\sin xy + 1 = 0$

**Giải**

a. $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + n\pi\end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b. $x^2-2x\sin xy+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x\sin xy+\sin^2 xy+\cos^2 xy=0$

$$\Leftrightarrow (x-\sin xy)^2+\cos^2 xy=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sin xy=0 \\ \cos xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin xy \\ xy=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

* Khi k = 2n ta có $\begin{cases} x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1 \\ xy=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z} \end{cases}$

* Khi k = 2n + 1 ta có $\begin{cases} x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)=-1 \\ xy=\dfrac{\pi}{2}+\pi+2n\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3\pi}{2}-2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi \end{cases}, n\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x.\sin^2 3x$

b. $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$

## Giải

a. $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x.\sin^2 3x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin^4 3x+\frac{1}{4}\sin^2 3x-\frac{1}{4}\sin^4 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)+\frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 3x=0 \\ \sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 3x=0 \\ \sin x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^2 3x=1 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 3x=0 \\ \sin x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 3x=\pm 1 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{3}\\ x=n\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+n\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+n2\pi\end{cases}\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

b. $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin^2 3x+4\sin 3x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+\left(\sin 3x+1\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n2\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

## Dạng 3. Phương trình dạng $f(x)\le\alpha, g(x)\ge\alpha, f(x)=g(x)$

***Phương pháp:***

1. *Để giải phương trình* $f(x)=g(x)$ *ta đi chứng minh*

$$\begin{cases}f(x)\le\alpha\\ g(x)\ge\alpha, \forall x\in D=D_f\cap D_g\end{cases}\ (*)$$

2. *Từ phương trình* $f(x)=g(x)$ *với đánh giá (*) ta có* $\begin{cases}f(x)=\alpha\\ g(x)=\alpha\end{cases}$

3. *Nếu* $f(x)>\alpha,\ g(x)\le\alpha,\ \forall x\in D=D_f\cap D_g$ *thì phương trình vô nghiệm*

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Giải các phương trình sau

a. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(2-\sin 3x\right)$ b. $\left(\cos 4x-\cos x\right)^2=5+\sin 3x$

### Giải

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$

Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2}(2 - \sin 3x) \ge \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(2 - \sin 3x) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

b. $(\cos 4x - \cos x)^2 = 5 + \sin 3x$

$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4\sin^2 3x \sin^2 x \le 4, \forall x \in \mathbb{R}$

$5 + \sin 3x \ge 4, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $\begin{cases} 4\sin^2 3x \sin^2 x = 4 \\ 5 + \sin 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ (\sin x - 1)(2\sin x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x\sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1$

b. $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = 2\cos 2x$

### Giải

a. Điều kiện $\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - 1 \ge 0 \\ \frac{1}{\cos 3x} - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos x \le 1 \\ 0 < \cos 3x \le 1 \end{cases} (*)$

Ta có: $\cos x\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}+\cos 3x\sqrt{\dfrac{1-\cos 3x}{\cos 3x}}=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x-\cos^2 x}+\sqrt{\cos 3x-\cos^2 3x}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{-\left(\cos 3x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=1$$

Ta có: $\sqrt{-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\le\frac{1}{2},\ \sqrt{-\left(\cos 3x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\le\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{-\left(\cos 3x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\le 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\\ \sqrt{-\left(\cos 3x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos 3x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ 4\cos^3 x-3\cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ -1=\frac{1}{2}(\text{vô lí})\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

b. Điều kiện $\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \sin x\ge 0\end{cases}$

$$\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}=2\cos 2x\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)\left[\frac{1+\sin x\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}-2(\cos x+\sin x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \dfrac{1+\cos x\sin x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}=2(\cos x+\sin x)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ 1+\cos x\sin x=2(\cos x+\sin x)\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)\end{array}\right.$$

Ta có: $0\le\cos x\le 1\Rightarrow\cos x\ge\cos^2 x$ và $\sqrt{\cos x}\ge\cos^2 x$

$0\le\sin x\le 1\Rightarrow\sin x\ge\sin^2 x$ và $\sqrt{\sin x}\ge\sin^2 x$

$$\Rightarrow 2(\cos x+\sin x)\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)\ge 2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2$$

Mặt khác: $1+\cos x\sin x = 1+\frac{1}{2}\sin 2x \le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2$

Suy ra phương trình:

$1+\cos x\sin x = 2(\cos x+\sin x)\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)$ vô nghiệm

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a. $\sin 4x\cos 16x = 1$ b. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\frac{1}{8}$

### Giải

a. $\sin 4x\cos 16x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 20x+\sin(4x-16x)]=1$

$\Leftrightarrow \sin 20x+\sin(-12x)=2$

Ta có: $\sin 20x\le 1$ và $\sin(-12x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sin 20x+\sin(-12x)\le 2, \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: $\begin{cases}\sin 20x=1\\ \sin(-12x)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{10}\\ x=-\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{6}\end{cases}; k,m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{10}=-\frac{\pi}{24}+m\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 3k+2=5m \Leftrightarrow 5m-3k=2=5.1-3.1$

$\Leftrightarrow 5(m-1)=3(k-1)\Rightarrow 1+3q$ với $q=k-1$

Nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{(1+3q)\pi}{6}, q\in\mathbb{Z}$.

b. Ta có $(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2\le 2(\sin^4 2x+\cos^4 2x)\le 2\sqrt{2}\sqrt{\sin^8 2x+\cos^8 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\left[\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)^2\right]^2\le \sin^8 2x+\cos^8 2x$

$\Leftrightarrow \sin^8 2x+\cos^8 2x\ge\frac{1}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi: $\cos^2 2x=\sin^2 2x \Leftrightarrow \cos 4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 x - 4\cos x - 2x\sin x + x^2 + 3 = 0$

b. $3\cot^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 4\cos x + 2 = 0$

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a. $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2\left(1 + \sin^2 2x\right)$

b. $\cot 2x + \cot 3x + \dfrac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a. $\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y$

b. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \dfrac{9}{4}$

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a. $\left(\sin^3\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\sin^3\dfrac{x}{2}}\right)^2 + \left(\cos^3\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\cos^3\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{81}{4}\cos^2 4x$

b. $\dfrac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x}$

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

a. $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$

b. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

a. $\cos^2 x - 4\cos x - 2x\sin x + x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sin x)^2 + 2(\cos x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin x \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(k2\pi) \\ x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

b. $3\cot^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 4\cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cot x - 1)^2 + (2\cos x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2.**

a. $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$

Ta có : $2(1 + \sin^2 2x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \leq \sqrt{2\left(\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x\right)} = 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $\begin{cases} \sin^2 2x = 0 \\ \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Điều kiện $\sin x \sin 2x \sin 3x \neq 0$

Ta có : $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} + \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x} + \dfrac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x}{\sin 2x \sin 3x} + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x.\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

**Bài 3.**

a. Ta có $\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sqrt{\sin^2x}}\right)\le\sqrt{2}\sqrt{\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}+\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right]^2\le\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2\le\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2$$

Ta có $\left(1+\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\right)^2=\left(1+\frac{4}{\sin^22x}\right)^2\ge25$

$$\Rightarrow\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2\ge\frac{25}{2}=12+\frac{1}{2}$$

Mặt khác: $12+\frac{1}{2}\sin y\le12+\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$

Suy ra $\begin{cases}\sin y=1\\ \cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}=\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\\ \sin^22x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=1\\ \cos2x=0\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\end{cases};k,m\in\mathbb{Z}.$$

b. $\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)=\frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{1-\cos2y}{2}+1-\cos^2(x+y)=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow2-\left[\frac{\cos2x+\cos2y}{2}\right]-\cos^2(x+y)=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow2-\cos(x+y)\cos(x-y)-\cos^2(x+y)=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y)=0 \\ \cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=k\pi \\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}\cos(k\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=k\pi \\ \cos(x+y)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=k\pi \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+k\pi+n2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=k\pi \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}-k\pi+m2\pi \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+k\pi+m\pi \\ y=\frac{\pi}{3}+m\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+m\pi \\ y=-\frac{\pi}{3}-k\pi+m\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{với } k,m\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 4**

a. $\left(\sin^3\frac{x}{2}+\frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\cos^3\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}}\right)^2=\sin^6\frac{x}{2}+\cos^6\frac{x}{2}+\frac{1}{\sin^6\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^6\frac{x}{2}}+4$

$$=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^3-3\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1-3\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^6\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}}+4$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 x+\frac{\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 x\right)64}{\sin^6 x}+4\geq 1-\frac{3}{4}+\frac{64-48}{1}+4=\frac{81}{4},\forall x\in R$$

Mặt khác: $\frac{81}{4}\cos^2 4x\leq\frac{81}{4},\forall x\in R$

Suy ra $\begin{cases} \sin^2 x=1 \\ \cos^2 4x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b. Ta có $\dfrac{\sin^6+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}=\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{4-3\sin^2 2x}$

$$=\frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{4-3\sin^2 2x}=\frac{1}{4}$$

Suy ra: $\dfrac{\sin^{10} x+\cos^{10} x}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \sin^{10} x+\cos^{10} x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^8 x-1)=\cos^2 x(1-\cos^8 x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x\left(\sin^8 x-1\right)=0\\ \cos^2 x\left(1-\cos^8 x\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=\pm 1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\pm 1\\ \cos x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

**Bài 5.**

a. Ta có $\left(\cos 2x-\cos 4x\right)^2=4\sin^2 3x.\sin^2 x\le 4,\forall x\in\mathbb{R}$

$6+2\sin 3x\ge 4,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $\begin{cases}\sin^2 3x\sin^2 x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

b. Ta có $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x-1$

$=2\cos 3x\left(\cos x+\cos 3x\right)-1=4\cos 3x\cos 2x\cos x-1$

Suy ra $4\cos 3x\cos 2x\cos x-1=\cos 3x\cos 2x\cos x+2$

$\Leftrightarrow \cos 3x\cos 2x\cos x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 6x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=1\\ 2\cos^2 2x-1=1\\ 4\cos^3 2x-3\cos 2x=1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

# Chương III: BÀI TOÁN TAM GIÁC

## A – MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ

**1. Các kí hiệu:** Cho tam giác ABC (ΔABC) ta kí hiệu:

- Góc ở đỉnh A, B, C là A, B, C.
- a, b, c lần lượt là độ dài của các cạnh BC, CA, AB.
- $S_{\Delta ABC}$ (hoặc có khi kí hiệu là S) là diện tích của ΔABC
- $h_a$, $h_b$, $h_c$ lần lượt là độ dài các đường cao thuộc các cạnh BC, CA, AB.
- $m_a$, $m_b$, $m_c$ lần lượt là độ dài các đường trung tuyến thuộc các cạnh BC, CA, AB.
- $l_a$, $l_b$, $l_c$ lần lượt là độ dài các đường phân giác trong của các góc A, B, C.
- r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp ΔABC.
- $r_a$, $r_b$, $r_c$ lần lượt là bán kính của đường tròn bàng tiếp thuộc các góc A, B, C.
- p là nửa chu vi ΔABC: $p = \frac{a+b+c}{2}$

**2. Các định lí:**

+ Định lí hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

+ Định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$\sin A = \frac{a}{2R};\ \sin B = \frac{b}{2R};\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

**3. Các công thức tính toán:**

+ Tính độ dài trung tuyến:

3) Chứng minh: $P - Q = 0$.

***Chú ý:***

1) Để chứng minh đẳng thức giữa các hàm số lượng giác trong tam giác cần sử dụng các kiến thức như:

$$A + B + C = \pi \qquad\qquad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \ldots$$

và kết hợp các phép biến đổi lượng giác thích hợp.

2) Để chứng minh các đẳng thức liên hệ giữa cạnh và góc của tam giác cần sử dụng các kiến thức như: định lí cosin, định lí sin, các công thức tính toán... và kết hợp các phép biến đổi lượng giác thích hợp.

## BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Cho $\Delta ABC$, chứng minh:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos\dfrac{B + C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$.

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$.

d) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

e) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$.

***Giải***

a) Ta có: $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$.

b) Ta có: $\cos\dfrac{B + C}{2} = \cos\dfrac{\pi - A}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right) = \sin\dfrac{A}{2}$.

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) + 2\sin C\cos[\pi - (A + B)]$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 2\sin C.2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$.

d) $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} + \cos C$

$= 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right)\cos\dfrac{A - B}{2} + 1 - 2\sin^2\dfrac{C}{2} = 1 + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} - 2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$= 1 + 2\sin\dfrac{C}{2}[\cos\dfrac{A - B}{2} - \sin(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A + B}{2})]$

$= 1 + 2\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A - B}{2} - \cos\dfrac{A + B}{2}) = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$=\tan\frac{B}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2})+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{A+C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=1.$$

c) Ta có: $-\tan C=\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

$\Rightarrow -\tan C+\tan C\tan A\tan B=\tan A+\tan B$

$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

d) Ta có: * $\sin A+\sin B-\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

* $\cos A+\cos B-\cos C+1=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}$

$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

Vậy $\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\cos A+\cos B-\cos C+1}=\dfrac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

**Bài 3:** Cho $\Delta ABC$, chứng minh:

a) $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

b) $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$.

c) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$.

d) $l_a=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

*Giải*

a) Ta có: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B}{4R^2\sin^2C}=\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2C}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A)-\frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2C}=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{2\sin^2C}=\dfrac{\sin(A-B)\sin(B+A)}{\sin^2C}$

$=\dfrac{\sin(A-B)\sin C}{\sin^2C}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

b) Ta có: $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow\sin A=\dfrac{2S}{bc}$

$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$;

Tương tự: $\cot B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$.

Khi đó: $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\frac{abc}{4R}}=\dfrac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$.

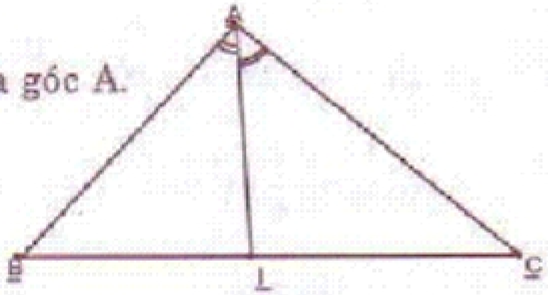
c) Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a}{b}\sin B; \sin B = \frac{b}{a}\sin A$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\sin(A + B) = \frac{1}{2}ab(\sin A\cos B + \sin B\cos A)$$

$$= \frac{1}{2}ab\left(\frac{a}{b}\sin B\cos B + \frac{b}{a}\sin A\cos A\right) = \frac{1}{2}(a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A)$$

$$= \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

d) Gọi I là chân đường phân giác trong của góc A.



Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABI} + S_{\Delta ACI}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow bc\sin A = l_a\sin\frac{A}{2}(b + c) \Leftrightarrow l_a = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Kết quả tương tự: $l_b = \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}$; $l_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

**Bài 4:** Cho ΔABC, chứng minh:

a) $\frac{S}{p(p-a)} = \tan\frac{A}{2}$

b) $4R + r = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$

c) $bc(2p - a)\cos A + ca(2p - b)\cos B + ab(2p - c)\cos C$

$= 8R^3(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$.

*Giải*

a) $$\frac{S}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{b^2+c^2-a^2+2bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{-(b^2+c^2-a^2)+2bc}{b^2+c^2-a^2+2bc}} = \sqrt{\frac{2bc-2bc\cos A}{2bc+2bc\cos A}} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}} = \tan\frac{A}{2}$$

(Vì $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2} > 0$).

Ta cũng có các kết quả tương tự: $\frac{S}{p(p-b)} = \tan\frac{B}{2}$; $\frac{S}{p(p-c)} = \tan\frac{C}{2}$.

b) Theo a) ta có: $p\tan\frac{A}{2} = \frac{S}{p-a}$

Khi đó: $4R + r = p(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2})$

$$\Leftrightarrow 4R + \frac{S}{p} = p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2} + p\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4R + \frac{S}{p} = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \Leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = 4R$$

Ta có: $\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = S[\frac{2p-(a+b)}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}]$

$$= S\left[\frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}\right] = Sc\frac{p(p-c)-(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= cS\frac{2p^2-(a+b+c)p+ab}{S^2} = \frac{abcS}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R.$$

c) $VP = (2R\sin A)^3 + (2R\sin B)^3 + (2R\sin C)^3 = a^3 + b^3 + c^3$.

Ta có: $bc(2p - a)\cos A = bc(b + c)\cos A = bc(b+c)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2} = \frac{1}{2}\left[b^3+c^3-a^2(b+c)+bc(b+c)\right] \qquad (1)$$

Tương tự: $ca(2p - b)\cos B = \frac{1}{2}\left[c^3+a^3-b^2(c+a)+ca(c+a)\right] \qquad (2)$

$$ab(2p-c)\cos C = \frac{1}{2}\left[a^3+b^3-c^2(a+b)+ab(a+b)\right] \qquad (3)$$

Từ đó: Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được $VT = a^3 + b^3 + c^3 = VP$.

**Bài 5:** Cho $\Delta ABC$ thoả mãn $\frac{c}{a} = \frac{m_a}{m_c} \neq 1$, chứng minh: $2\cot B = \cot A + \cot C$.

***Giải***

Ta có: $\frac{c}{a} = \frac{m_a}{m_c} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{m_a^2}{m_c^2} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{2(a^2+b^2)-c^2}$

$\Leftrightarrow 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 = 2a^2(b^2 + c^2) - a^4 \Leftrightarrow 2c^2b^2 - 2a^2b^2 = c^4 - a^4$

$\Leftrightarrow 2b^2(c^2 - a^2) = c^4 - a^4 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$ (vì $c \neq a$) $\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - b^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 2ac\cos B \Leftrightarrow (2R\sin B)^2 = 2ac\cos B \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 B = 2ac\cos B$.

Khi đó:

$$2\cot B = \frac{4R^2\sin B}{ac} = \frac{4R^2\sin B}{2R\sin A.2R\sin C} = \frac{\sin B}{\sin A.\sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A.\sin C}$$

$$= \frac{\sin A\cos C + \sin C\cos A}{\sin A.\sin C} = \cot A + \cot C.$$

**Bài 6:** Cho $\Delta ABC$ thoả mãn $\sin A\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2}$, chứng minh: $a + b = 2c$.

*Giải*

Ta có: $\sin A\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2} = 3\frac{\sin^2 C}{4\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{3}{2}.\frac{\sin^2 C}{1+\cos C}$

$$4R^2\sin A\sin B = \frac{3}{2}.\frac{4R^2\sin^2 C}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \Leftrightarrow ab = \frac{3}{2}.\frac{2abc^2}{a^2+b^2-c^2+2ab}$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 4c^2 \Leftrightarrow a + b = 2c$.

## Dạng 2: Tính toán các yếu tố trong tam giác

***Phương pháp:*** Sử dụng các định lí côsin, sin, các công thức tính toán và các phép biến đổi dựa vào các giả thiết của bài toán.

***Chú ý:*** Ta thường sử dụng đẳng thức $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1:** Cho $\Delta ABC$ có $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$. Tính các góc A, B và đường cao $h_a$ của $\Delta ABC$.

*Giải*

Ta có:

$$* \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4+(1+\sqrt{3})^2-6}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow A = 60^\circ$.

$$* \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(1+\sqrt{3})^2+6-4}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow B = 45^\circ$.

$$* \sin B = \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow h_a = c\sin B = (1+\sqrt{3}).\sin 45^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}.$$

**Bài 2:** Tính các góc ΔABC biết:

$$\sin(B+C) + \sin(C+A) + \cos(A+B) = \frac{3}{2}\ (*).$$

***Giải***

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \sin A + \sin B - \cos C = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})^2 + 1 - \cos^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \\ \sin\frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{C}{2} = 1 \\ \frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 120^\circ \\ A = B = 30^\circ \end{cases}.$$

**Bài 3:** Tính các góc ΔABC biết: $\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$

***Giải***

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \le 0$ (vì $b^2 + c^2 - a^2 \le 0$)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le A < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\frac{A}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=2$.

c) $\dfrac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$.

**Bài 4.** Cho $\Delta ABC$, G là trọng tâm của tam giác, $\widehat{GAB}=\alpha, \widehat{GBC}=\beta$,

$\widehat{GCA}=\gamma$. Chứng minh:

a) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

b) $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

c) $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$).

d) $\dfrac{3}{2}(\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c})=\dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{abc}$.

**Bài 5.** Cho $\Delta ABC$, chứng minh:

a) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$.

b) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

c) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

d) $\sin\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$.

e) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$.

**Bài 6.** Cho $\Delta ABC$, chứng minh: $A=2B \Leftrightarrow a^2=b(b+c)$.

**Bài 7.** Cho $\Delta ABC$ thoả mãn: $\sin A\sin B=3\sin^2\dfrac{C}{2}$, chứng minh: $a+b=2c$.

**Bài 8.** Cho $\Delta ABC$, chứng minh:

a) $r=(p-a)\tan\dfrac{A}{2}$.

b) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

c) $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$.

d) $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$.

e) $bc\cot\frac{A}{2} + ca\cot\frac{B}{2} + ab\cot\frac{C}{2} = 4Rp^2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{p})$.

f) $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = p^2$.

**Bài 9.** Tính các góc của $\Delta ABC$ biết: $\cos2A + \sqrt{3}(\cos2B + \cos2C) + \frac{5}{2} = 0$

**Bài 10.** Tính các góc của $\Delta ABC$ biết:

$\Delta ABC$ không tù và $\cos2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$.

*(Khối A – 2004)*

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a) $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2})$

$= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

b) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = \frac{1+\cos2A}{2} + \frac{1+\cos2B}{2} + \cos^2C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C = 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$ (vì $\cos(A+B) = -\cos C$)

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

c) Ta có: $-\cot A = \cot(B+C) \Leftrightarrow -\cot A = \frac{1}{\tan(B+C)}$

$\Leftrightarrow -\cot A = \frac{1-\tan B\tan C}{\tan B + \tan C} \Leftrightarrow -\cot A = \frac{1-\frac{1}{\cot B\cot C}}{\frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C}}$

$\Leftrightarrow -\cot A = \frac{\cot B\cot C - 1}{\cot B + \cot C}$ $-\cot A\cot B - \cot A\cot C = \cot B\cot C - 1$

$\Leftrightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$.

d) Ta có: $\cot\frac{A}{2} = \tan\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} = \dfrac{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}}{1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} = \dfrac{\dfrac{1}{\cot\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cot\frac{C}{2}}}{1 - \dfrac{1}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} = \dfrac{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

e) Ta có: $\cos2A + \cos2B + \cos2C + 1$

$= 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2C = -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2C$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = -4\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos2A + \cos2B + \cos2C + 4\cos A\cos B\cos C + 1 = 0.$

f) $\cos3A + \cos3B + \cos3C = 2\cos\frac{3}{2}(A + B)\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$

$$= 2\cos\frac{3}{2}(\pi - C)\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3}{2}(A - B) + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3}{2}(A - B) + \sin\frac{3C}{2}\right] + 1$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3}{2}(A - B) - \cos\frac{3}{2}(A + B)\right] + 1$$

$$= 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}.$$

g) Làm tương tự câu f).

**Bài 3.**

a) Ta có: $\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

Khi đó:

ĐPCM $\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$

$\cos\frac{C}{2}(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2})+\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})=1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\sin(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})+\sin\frac{C}{2}\cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=1$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1$ (đúng).

Vậy ta có đpcm.

b) $$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin A+\sin B}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=2.$$

c) Ta đã chứng minh được (bạn đọc xem ở trên)

$$* \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 3 + \cos A + \cos B + \cos C = 4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$* \sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Từ đó: $\frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}] + \cos\frac{A}{2}[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}) + \cos\frac{A}{2}\sin(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1 \text{ (đúng)}.$$

**Bài 4.**

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

c) $b\cos B + c\cos C = R(2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C) = R(\sin 2B + \sin 2C)$
$= 2R\sin(B + C)\cos(B - C) = 2R\sin A\cos(B - C) = a\cos(B - C)$.

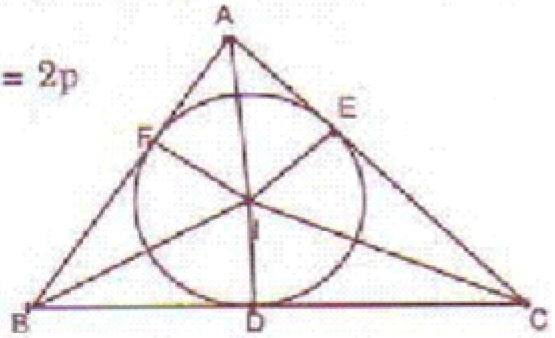
d) $$\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} = \frac{2R(\sin B - \sin C)}{2R\sin A}.\cos\frac{A}{2} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin A}.\cos\frac{A}{2}$$
$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B-C}{2}.$$

e) Ta có: $(b^2 - c^2)\cot A = 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)\cot A$
$$= 4R^2\left(\frac{1-\cos 2B}{2} - \frac{1-\cos 2C}{2}\right)\cot A = 2R^2(\cos 2C - \cos 2B)\cot A$$
$$= -4R^2\sin(C + B)\sin(C - B)\cot A = -4R^2\sin A\sin(C - B)\frac{\cos A}{\sin A}$$
$= 4R^2\sin(C - B)\cos(B + C) = 2R^2(\sin 2C - \sin 2B)$
Từ đó: $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C$
$= 2R^2(\sin 2C - \sin 2B + \sin 2A - \sin 2C + \sin 2B - \sin 2A) = 0$.

**Bài 6.** Ta có: $a^2 = b(b + c) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + bc$
$\Leftrightarrow c - b(2\cos A + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin C - \sin B(2\cos A + 1) = 0$
$\Leftrightarrow \sin C - 2\sin B\cos A - \sin B = 0 \Leftrightarrow \sin(A + B) - 2\sin B\cos A - \sin B = 0$
$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A - \sin B = 0 \Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B$
$\Leftrightarrow A - B = B \Leftrightarrow A = 2B$.

**Bài 7.** $$\sin A\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin A\sin B = 3.\frac{\sin^2 C}{4\cos^2\frac{C}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \sin A\sin B = \frac{3}{2}.\frac{\sin^2 C}{1+\cos C} \Leftrightarrow \frac{a}{2R}.\frac{b}{2R} = \frac{3}{2}.\frac{\left(\frac{c}{2R}\right)^2}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$
$$\Leftrightarrow ab = \frac{3}{2}.\frac{2abc^2}{(a+b)^2-c^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{3c^2}{(a+b)^2-c^2} \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3c^2$$
$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 4c^2 \Leftrightarrow a + b = 2c$.

**Bài 8.** a) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$; D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.



Ta có: $AF + FB + BD + DC + CE + EA = 2p$

$\Rightarrow AF + BD + CE = p$

$\Rightarrow AF = p - (BD + CE)$

$= p - (BD + DC) = p - a$

Xét $\Delta$ vuông AFI:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{FI}{AF} = \frac{r}{p-a} \Rightarrow r = (p-a)\tan\frac{A}{2}.$$

b) $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b + c - a)\tan\frac{A}{2}$

$$= R(\sin B + \sin C - \sin A)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = ... = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(Bạn đọc tự biến đổi)

c) $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2R(\sin A\cot A + \sin B\cot B + \sin C\cot C)$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}) = 2R(1 + \frac{r}{R})$$

$$= 2(R + r) \text{ (vì } r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{R}\text{)}.$$

d) Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$.

e) * $bc\cot\frac{A}{2} + ca\cot\frac{B}{2} + ab\cot\frac{C}{2} = \frac{abc}{a}\cot\frac{A}{2} + \frac{abc}{a}\cot\frac{B}{2} + \frac{abc}{a}\cot\frac{C}{2}$

$$= 2\frac{abc}{4R}.\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin A} + 2\frac{abc}{4R}.\frac{\cot\frac{B}{2}}{\sin B} + 2\frac{abc}{4R}.\frac{\cot\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$= S\left(\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin A} + \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin B} + \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin C}\right) = S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)$$

* $4Rp^2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{p}) = 4Rp(\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} - 3) = 4Rp(\frac{p-a}{a} + \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c})$

$$= 4Rp\left(\frac{r}{2R\sin A\tan\frac{A}{2}} + \frac{r}{2R\sin B\tan\frac{B}{2}} + \frac{r}{2R\sin C\tan\frac{C}{2}}\right)$$

$$= pr\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right) = S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right).$$

f) $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}bc(1 + \cos A) + \frac{1}{2}ca(1 + \cos B) + \frac{1}{2}ab(1 + \cos C)$$

$$= \frac{1}{2}(bc + ca + ab) + \frac{1}{2}bc\cos A + \frac{1}{2}ca\cos B + \frac{1}{2}ab\cos C$$

$$= \frac{1}{2}(bc + ca + ab) + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{4}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = p^2.$$

**Bài 9.** $\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\cos(B + C)\cos(B - C) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A\cos(B - C) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C)]^2 + 3 - 3\cos^2(B - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C)]^2 + 3\sin^2(B - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C) = 0 \\ \sin^2(B - C) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^\circ \\ B = C = 75^\circ \end{cases}.$$

**Bài 10.** $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$

$$\Leftrightarrow \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

## Giải

a. Ta có $\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{\pi}{3}\le 2\sin\frac{A+B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\sin\frac{A+B}{2}+\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\le 2\sin\left(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$$

Suy ra: $\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{\pi}{3}\le 4\sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \cos\left(\frac{c}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ \cos\left(\frac{A+B+C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

b. Ta có: $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos C+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$0<\cos\frac{A-B}{2}\le 1$ và $0<\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Rightarrow\ \cos A+\cos B\le 2\cos\frac{A+B}{2}$

$\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\le 2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\le 2\left[\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(\frac{c}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\le 2\cos\left(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\le 2\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le 3\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Mặt khác: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$

$\Rightarrow 1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{A+B+C}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh

a. $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$.

b. $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge 9$.

**Giải**

a. Ta có: A, B, C là góc nhọn nên $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

Mặt khác:

$\tan C = \tan\left[\pi - (A+B)\right] = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$\Leftrightarrow \tan C(1 - \tan A \tan B) = -(\tan A + \tan B)$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C = T$

Ta có: $T \ge 3\sqrt[3]{T} \Leftrightarrow T^3 \ge 27T \Leftrightarrow T^2 \ge 27$

$\Leftrightarrow T \ge 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\tan A = \tan B = \tan C \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b. Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge 3\sqrt[3]{\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C}$$

$$\tan A \tan B \tan C \ge 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C \ge 27$$

Suy ra $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge 9$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\tan^2 A = \tan^2 B = \tan^2 C$

$\Rightarrow \tan A = \tan B = \tan C \Rightarrow A = B = C \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC.

Chứng minh rằng:

a. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$. b. $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$.

**Giải**

a. Ta có: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$$\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{2}\left[\frac{1-\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}}{2}\right]^2\le\frac{1}{8}.$$

***Cách khác.***

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}\right]\le 0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin\frac{A-B}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{A-B}{2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\\ A=B\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

b. $\cos A\cos B\cos C-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]\cos C-\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{2}[-\cos C+\cos(A-B)]\cos C-\frac{1}{8}$

$=-\frac{1}{2}\cos^2 C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\cos C-\frac{1}{8}$

$=-\frac{1}{2}\left[\cos^2 C-\cos(A-B)\cos C+\frac{1}{4}\right]$

$=-\frac{1}{2}\left[\left(\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)\right]\le 0$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\cos(A-B)\\ \sin(A-B)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\\ A-B=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

***Cách khác***

+ Nếu $\Delta ABC$ có một góc tù A thì B và C là góc nhọn

Suy ra: $\cos A\cos B\cos C<0\Rightarrow\cos A\cos B\cos C<\frac{1}{8}$

+ Nếu $\Delta ABC$ có ba góc nhọn thì $\cos A>0, \cos B>0, \cos C>0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$\cos A+\cos B+\cos C\ge 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$

Mặt khác: $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Suy ra $3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos A=\cos B=\cos C\Rightarrow A=B=C$.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\le\dfrac{1}{4r^2}$.  b. $\dfrac{1}{c}(l_a+l_b)+\dfrac{1}{b}(l_a+l_c)+\dfrac{1}{a}(l_b+l_c)\le 3\sqrt{3}$.

### Giải

a. Ta có: $r=\dfrac{S}{p}\Rightarrow 4r^2=\dfrac{4S^2}{p^2}=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$

$$=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4r^2}=\frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$p-a+p-b\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}\Leftrightarrow c^2\ge 4(p-a)(p-b)$$

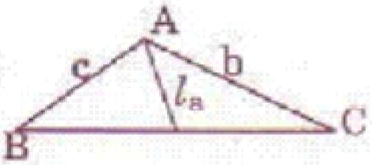
$$\Leftrightarrow\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4(p-a)(p-b)}$$

Tương tự: $\dfrac{1}{b^2}\le\dfrac{1}{4(p-c)(p-a)}$ và $\dfrac{1}{a^2}\le\dfrac{1}{4(p-b)(p-c)}$

Cộng vế theo vế : $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\le\dfrac{1}{4r^2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}p-a=p-b\\p-c=p-a\\p-b=p-c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$.

b. Xét tam giác ABC và phân giác của góc A là $l_a$



Ta có: $\dfrac{1}{2}l_a c\sin\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{2}bl_a\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$$\Rightarrow(b+c)l_a\sin\frac{A}{2}=2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\Leftrightarrow l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Tương tự ta có: $l_b=\dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}$ và $l_c=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$

Vế trái $=\dfrac{l_a+l_b}{c}+\dfrac{l_b+l_c}{a}+\dfrac{l_c+l_a}{b}=\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}\right)l_a+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)l_b+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)l_c$

$$=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

Ta có: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}\le 2\cos\frac{A+B}{4}$

$$\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\le 2\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{A+B-C}{8}-\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\le 2\cos\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)\Rightarrow \cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\le 2\cos\frac{\pi}{6}$$

Suy ra: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 3\cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vế trái $=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\le 3\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos\frac{A-B}{4}=1\\ \cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=1\\ \cos\left(\frac{A+B-C}{8}-\frac{\pi}{24}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}.$

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$. b. $2<\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$.

c. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

d. $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge 6$ với A, B, C là ba góc nhọn.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$. b. $\frac{4}{3}\le\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1$.

c. $\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.        d. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\cos A + \cos B + \cos C \ge 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

b. $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \le \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$.

c. $\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{C-B}{2} \le \cos\left(\frac{A}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{C}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{B}{3} - \frac{\pi}{9}\right)$

d. $\cos^3\frac{A}{3} + \cos^3\frac{B}{3} + \cos^3\frac{C}{3} \le \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$

**Bài 4.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$.

b. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

c. $\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C \ge 9(\tan A + \tan B + \tan C)$ với A, B, C là 3 góc nhọn.

d. $\tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C \ge 9\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 C$ với A, B, C là 3 góc nhọn.

**Bài 5.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \ge 3^{1-\sqrt{2}}$.

b. $\left(1 + \tan\frac{A}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{B}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{C}{2}\right) \ge 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}$.

**Bài 6.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a. $m_a m_b m_c \le \frac{27R^3}{8}$.

b. $8(p-a)(p-b)(p-c) \le abc$.

c. $a^4 + b^4 + c^4 \ge 16S^2$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-\frac{3}{4}=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C-\frac{3}{4}$

$$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C-\frac{3}{4}$$

$$=\cos^2 C-\cos C\cos(A-B)+\frac{1}{4}$$

$$=\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{3}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\cos(A-B)\\ \sin(A-B)=0\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

b. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}$$

Ta có: $1<\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}\leq\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 2<\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{9}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

c. Ta có: $\cos\frac{A}{2}>0$, $\cos\frac{B}{2}>0$ và $\cos\frac{C}{2}>0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

Ta có: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 3\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

d. Ta có : $\cos A > 0$, $\cos B > 0$ và $\cos C > 0$ (Do A, B, C là ba góc nhọn)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C}}$

Mặt khác ta có: $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} \ge 8 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C}} \ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \ge 6$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Delta ABC$ đều.

**Bài 2.** a. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C$

$$= 3 - \left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right) \le 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Delta ABC$ đều.

b. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \cos^2 \frac{A}{2} + 1 - \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - \cos^2 \frac{C}{2}$

Suy ra $\frac{4}{3} \le \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} < 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Delta ABC$ đều.

c. Ta có: $\sin A > 0$, $\sin B > 0$ và $\sin C > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\sin A + \sin B + \sin C \ge 3\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$$

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

d. Ta có $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} = 2\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4}\right) \le 2\sin \frac{A+B}{4}$

$$\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{\pi}{6} = 2\sin\left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \le 2\sin\left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+B}{4}+\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{A+B-C}{8}-\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\le 2\sin\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

**Bài 3.** a. $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]+1=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\ge 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Ta có:

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A\Leftrightarrow \cos^3 A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$$

$$\cos^3 B=\frac{3\cos B+\cos 3B}{4}\text{ và }\cos^3 C=\frac{3\cos C+\cos 3C}{4}$$

$$\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C=\frac{3(\cos A+\cos B+\cos C)}{4}+\frac{\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C}{4}$$

Ta có: $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3(\cos A+\cos B+\cos C)}{4}\le\frac{9}{8}$

$$\Rightarrow \cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\le\frac{9}{8}+\frac{\cos 3A+\text{co}3B+\cos 3C}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

c. Ta có: $\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-A}{2}=2\cos\frac{C-B}{4}\cos\frac{2A-B-C}{4}$

$$=2\cos\frac{C-B}{4}\cos\frac{3a-\pi}{4}\le 2\cos\left|\frac{3A-\pi}{4}\right|$$

Mặt khác: $0 < A < \pi \Leftrightarrow 0 < 3a < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{3A-\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

và $\left|\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right)\right| \le \left|\frac{3A-\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos\left|\frac{3A-\pi}{4}\right| \le \cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \le 2\cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$$

Tương tự: $\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} \le 2\cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{B-C}{2} \le 2\cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$$

Cộng vế theo vế: $2\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2}\right] \le$

$$2\left[\cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \le \cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Delta ABC$ đều.

d. Ta có:

$$\cos^3\frac{A}{3} = \frac{3\cos\frac{A}{3} + \cos A}{4}, \quad \cos^3\frac{B}{3} = \frac{3\cos\frac{B}{3} + \cos B}{4}$$

$$\cos^3\frac{C}{3} = \frac{3\cos\frac{C}{3} + \cos C}{4}$$

$$\cos^3\frac{A}{3} + \cos^3\frac{B}{3} + \cos^3\frac{C}{3} = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right) + \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{4}$$

$$\le \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Delta ABC$ đều.

**Bài 4.** a. Áp dụng bất đẳng thức Cosi

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} \ge 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

## 2. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Bài toán nhận dạng tam giác thường xuất phát từ một điều kiện cho sẵn là một hệ thức lượng giác của các góc, các cạnh, diện tích, bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp, đường cao, phân giác, trung tuyến trong một tam giác và yêu cầu:

1. Chứng minh tam giác đó là đều, cân, vuông.
2. Hoặc nhận dạng tam giác đó.

***Phương pháp chung.***

1. Vận dụng các công thức lượng giác, các hệ thức lượng giác trong tam giác để biến đổi điều kiện đã cho thành tích bằng không để suy ra tính chất của tam giác: Đều, cân, vuông, vuông cân ...
2. Sử dụng một số bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, bất đẳng thức Côsi

## 1. TAM GIÁC ĐỀU

Trong một số bất đẳng thức trong tam giác, dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác đó là tam giác đều. Do vậy, phần lớn bài toán nhận dạng tam giác là tam giác đều thì điều kiện cho trước là đẳng thức của một bất đẳng thức trong tam giác.

### BÀI TẬP MẪU

**Bài 1.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác đều.

a. $\cos A+\cos B+\cos C=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

b. $\sin A+\sin B+\sin C=4\sin A\sin B\sin C$

**Giải.**

a. Ta có: $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\sin\frac{C}{2}$

$\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le 2\sin\frac{A}{2}$

$$\cos C + \cos A = 2\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2} \le 2\sin\frac{B}{2}$$

Suy ra: $\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$ (*)

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$ nên bất đẳng thức (*) xảy ra dấu đẳng thức

Suy ra: $\begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \cos\frac{B-C}{2} = 1 \\ \cos\frac{C-A}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A-B}{2} = 0 \\ \frac{B-C}{2} = 0 \\ \frac{C-A}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

b. $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Từ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A \sin B \sin C \Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$ (1)

Mặt khác:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\left(\dfrac{1 - \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}}{2}\right)^2 \ge \left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ 1 - \sin\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta$ ABC đều.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác đều.

a. $2\left(a\cos A + b\cos B + c\cos C\right) = a + b + c$

b. $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2 B + \tan^2\dfrac{C}{2} - \tan^2\dfrac{A}{2}\tan^2 B\tan^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{26}{27}$.

**Giải**

a. Áp dụng định lí hàm sin: $a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C$

Thay vào: $2(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) = \sin A + \sin B + \sin C$

$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4\sin A\sin B\sin C$

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 4\sin A\sin B\sin C$

$$\Rightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A}{2} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{A}{2} - 1 = 0 \\ \sin\dfrac{B-C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{3} \\ B = C \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

b. Ta có: $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2 B + \tan^2\dfrac{C}{2} \geq 1\,(*)$ và $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,(**)$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} \leq \frac{1}{27}$$

Suy ra: $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2 B + \tan^2\dfrac{C}{2} - \tan^2\dfrac{A}{2}\tan^2 B\tan^2\dfrac{C}{2} \geq 1 - \dfrac{1}{27} = \dfrac{26}{27}$

Theo giả thiết: $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2 B + \tan^2\dfrac{C}{2} - \tan^2\dfrac{A}{2}\tan^2 B\tan^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{26}{27}$

Suy ra: Bất đẳng thức (*), (**) xảy ra dấu đẳng thức nên Δ ABC đều.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác đều.

a. $a^2+b^2+c^2=36r^2$.

b. $\begin{cases}\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}=\tan A+\sqrt{3}\\ \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\tan B}{\tan C}\end{cases}$

### Giải

a. Ta có: $a^2+b^2+c^2=36r^2=\dfrac{36S^2}{p^2}=\dfrac{36(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\ge\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{p^3}{27}\ge(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{36p^3}{27p}\ge\frac{36(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le\frac{4p^2}{3}$$

$$\frac{4p^2}{3}=\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)}{3}\le a^2+b^2+c^2$$

Suy ra: $\begin{cases}p-a=p-b=p-c\\ a^2=b^2=c^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c\Rightarrow\Delta ABC$ đều.

b. Ta có:

$$\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\tan A+\sqrt{3}\Leftrightarrow\sin C=\tan A\cos A\cos B+\sqrt{3}\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sqrt{3}\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow\sin B\cos A=\sqrt{3}\cos A\cos B\Leftrightarrow\tan B=\sqrt{3}\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$$

Ta có: $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\tan B}{\tan C}\Leftrightarrow\sin^2 B\tan C=\sin^2 C\tan B$

$$\Leftrightarrow\sin 2B=\sin 2C\Leftrightarrow B=C$$

Suy ra: $\Delta$ ABC đều.

**Bài 4.** Nhận dạng tam giác ABC, biết

a. $\begin{cases}\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0\\ \cos A\cos B=\sin^2\dfrac{C}{2}\end{cases}$

b. $2\cos A\sin B\sin C+\sqrt{3}\left(\sin A+\cos B+\cos C\right)=\dfrac{17}{4}$.

**Giải**

a. Ta có: $\cos A\cos B=\sin^2\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow 2\cos A\cos B=2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)+\cos(A+B)=1-\cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)+\cos(A+B)=1+\cos(A+B)\Leftrightarrow \cos(A-B)=1\Leftrightarrow A=B$

Ta có: $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0\Leftrightarrow 2\sin 3A+\sin 3\left(\pi-A\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3A+\sin 6A=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3A(1+\cos 3A)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3A=0\\ \cos 3A=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$ nên tam giác ABC đều.

b. Áp dụng định lí hàm côsin, sin:

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

$\Rightarrow 2\cos A\sin B\sin C=\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A$

Ta có: $2\cos A\sin B\sin C+\sqrt{3}\left(\sin A+\cos B+\cos C\right)=\dfrac{17}{4}$

nên: $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A+\sqrt{3}\left(\sin A+\cos B+\cos C\right)=\dfrac{17}{4}$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 B+1-\cos^2 C-\sin^2 A+\sqrt{3}\left(\sin A+\cos B+\cos C\right)=\dfrac{17}{4}$

$\Leftrightarrow 2-(\cos^2 B-\sqrt{3}\cos B)-(\cos^2 C-\sqrt{3}\cos C)-(\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A)-\dfrac{17}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0\\ \cos C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0\\ \sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}B=C=30^0\\ A=120^0\end{cases}\Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác đều.

a. $\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}=9$. b. $bc\sqrt{3}=R[2(b+c)-a]$.

c. $\begin{cases}\cos B\cos C=\frac{1}{4}\\ a^2=\frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\end{cases}$.

d. $\sin A+\sin B+\sin C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

**Bài 2.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác đều.

a. $\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C=\frac{a+b+c}{4R}$.

b. $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$ với A, B, C là ba góc nhọn.

c. $\begin{cases}\sin B+\sin C=2\sin A\\ \tan B+\tan C=2\tan A\end{cases}$.

d. $\begin{cases}\frac{1+\cos C}{\sin C}=\frac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}\\ a^2(b+c-a)=b^3+c^3-a^3\end{cases}$.

**Bài 3.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác đều.

a. $p+R=\left(2+3\sqrt{3}\right)r$. b. $m_a+m_b+m_c=\frac{9}{2}R$.

c. $3S=2R^2(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C)$. d. $ab+bc+ca=2(p^2-r^2-4Rr)$.

**Bài 4.** Nhận dạng tam giác ABC, biết

a. $\begin{cases}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \cos A+\cos B=1\end{cases}$. b. $\begin{cases}a=2b\cos C\\ a^2=\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}\end{cases}$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. Ta chứng minh được:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{27}\Leftrightarrow \cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\ge 9$$

Ta có: $\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}=9$, suy ra: $A=B=C$.

b. Áp dụng định lí hàm sin: $a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$

thay vào:

$bc\sqrt{3}=R[2(b+c)-a]$, ta có: $2\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin A=\sin B+\sin C$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin(A+C)=\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B(\cos C+\sqrt{3}\sin C)+\sin C(\cos B+\sqrt{3}\sin B)=\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1-\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\sin C\left[1-\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3}.$$

c. Ta có:

$$a^2=\frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\Leftrightarrow a^3-a^2b-a^2c=a^3-b^3-c^3\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$$

Áp dụng định lí hàm côsin:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$$

Ta có: $\cos B\cos C=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(B+C)+\cos(B-C)\right]=\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos(B+C)+\cos(B-C)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\cos A+\cos(B-C)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos(B-C)=1$$

$$\Rightarrow B=C.$$

d. Ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B) = 2\sin C\cos(A - B) \le 2\sin C$$

Tương tự: $\sin 2B + \sin 2C \le 2\sin A$, $\sin 2C + \sin 2A \le 2\sin B$

$\Rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$

Suy ra: $\begin{cases} \cos(A - B) = 1 \\ \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow A = B = C. \\ \cos(C - A) = 1 \end{cases}$

**Bài 2.** a.Ta có:

$$\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C = \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\frac{a + b + c}{4R} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{4R} = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

Suy ra: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

b. Ta có: $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right] \le \frac{1}{2}\left[1 + \cos(A + B)\right]$

$= \cos^2\frac{A + B}{2} = \sin^2\frac{C}{2}.$

Với A, B, C là ba góc nhọn nên $\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$ và áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \ge \frac{2}{\sqrt{\cos A\cos B}} \ge \frac{2}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \ge \frac{2}{\sqrt{\cos B\cos C}} \ge \frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\cos A} \ge \frac{2}{\sqrt{\cos C\cos A}} \ge \frac{2}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \ge \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Ta có: $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Suy ra: A = B = C.

c. Ta có: $\sin B+\sin C=2\sin A\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{B-C}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}\quad\Leftrightarrow\cos\left(B-C\right)=3-4\cos A\qquad(1)$$

Ta có: $\tan B+\tan C=2\tan A\Leftrightarrow\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\frac{2\sin A}{\cos A}$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{2\sin A}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow\cos A=2\cos B\cos C=\cos(B+C)+\cos(B-C)=-\cos A+\cos(B-C)$$

$\Leftrightarrow 2\cos A=\cos(B-C)$ (2). Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases}\cos\left(B-C\right)=3-4\cos A\\ \cos\left(B-C\right)=2\cos A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos A=\frac{1}{2}\\ \cos(B-C)=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

d. Ta có:

$$\frac{1+\cos C}{\sin C}=\frac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}\Leftrightarrow\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\sqrt{\frac{2a+b}{2a-b}}\Leftrightarrow\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{2a+b}{2a-b}}$$

$$\Leftrightarrow\cot^2\frac{C}{2}=\frac{2a+b}{2a-b}\Leftrightarrow 1+\cot^2\frac{C}{2}=1+\frac{2a+b}{2a-b}\Leftrightarrow 2a\cos C=b$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos C=\sin B=\sin(A+C)\Leftrightarrow\sin(A-C)=0\Leftrightarrow A=C$$

Ta có: $a^2(b+c-a)=b^3+c^3-a^3\Leftrightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{3}\Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}.$

**Bài 3.** a. Ta có: $r=\left(p-a\right)\tan\frac{A}{2}=\left(p-b\right)\tan\frac{B}{2}=\left(p-c\right)\tan\frac{C}{2}=\frac{S}{p}$

$$p=p-a+p-b+p-c=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq 3\sqrt{3}r$$

$$R\geq 2r\Leftrightarrow\frac{abc}{4S}\geq\frac{2S}{p}\Leftrightarrow abc\geq 8\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$$

Suy ra: $p+R\geq(2+3\sqrt{3})r$, ta có:

$$p+R=\left(2+3\sqrt{3}\right)r \Rightarrow \begin{cases}\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=3\sqrt{3}\\ abc=8(p-a)(p-b)(p-c)\end{cases} \Leftrightarrow A=B=C.$$

b. Ta có: $(m_a+m_b+m_c)^2=m_a^2+m_b^2+m_c^2+2(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $m_a^2+m_b^2\ge 2m_am_b$,

$m_b^2+m_c^2\ge 2m_bm_c$, $m_c^2+m_a^2\ge 2m_cm_a$

Suy ra: $(m_a+m_b+m_c)^2\le 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$

Mặt khác: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra: $\frac{81R^2}{4}\le\frac{9}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 9R^2$

$\Leftrightarrow 4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\ge 9R^2\Leftrightarrow \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\ge\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\ge\frac{1}{8}$

Ta chứng minh được: $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

Suy ra: $\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}\Rightarrow A=B=C$.

c. Ta có: $3S=\frac{3abc}{4R}=2R^2\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^3+\left(\frac{b}{2R}\right)^3+\left(\frac{c}{2R}\right)^3\right]\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$. Suy ra: $a=b=c$.

d. Ta có: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=4p^2-2(ab+bc+ac)$

$2\left(p^2-r^2-4Rr\right)=2p^2-2\left(\frac{S^2}{p^2}+\frac{4abc}{4S}.\frac{S}{p}\right)$

$=2p^2-2\frac{\left[(p-a)(p-b)(p-c)+abc\right]}{p}=4p^2-2(ab+bc+ac)$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 4.** a. Đặt $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{B}{2}$ với $x>0, y>0$ thì

$\cos A=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\cos B=\frac{1-y^2}{1+y^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{A-B}{2}=0 \\ \cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}-\cos A\cos B=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ \cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}-\cos A\cos B=0 \qquad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}-\cos A\cos B=0$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos(A-B)+\cos A+\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos A+\cos B=\cos(A+B)$$

Ta có: $1+\cos A+\cos B=1+2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=1+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}>1$

Mặt khác: $\cos(A+B)<1$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Suy ra: $\Delta$ ABC cân.

b. Ta có: $a\left(\cot\dfrac{C}{2}-\tan A\right)=b\left(\tan B-\cot\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a\left(\tan\frac{A+B}{2}-\tan A\right)=b\left(\tan B-\tan\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}\cos A}=\frac{b\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}\cos B}\Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}(a\cos B-b\cos A)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{B-A}{2}=0 \\ a\cos B-b\cos A=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ a\cos B-b\cos A=0 \end{array}\right.$$

Ta có: $a\cos B-b\cos A=0\Leftrightarrow \sin A\cos B-\sin B\cos A=0$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)=0\Leftrightarrow A=B$$

Suy ra: $\Delta$ ABC cân.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác cân.

a. $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.   b. $(p-b)\cot\dfrac{C}{2}=p\tan\dfrac{B}{2}$.

### Giải

a. Ta có:

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}\Leftrightarrow\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}\Leftrightarrow\cot\frac{B}{2}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$$

$$\Leftrightarrow\cot^2\frac{B}{2}=\frac{2a+c}{2a-c}\Leftrightarrow 1+\cot^2\frac{B}{2}=1+\frac{2a+c}{2a-c}\Leftrightarrow c^2=2ac\cos B$$

Áp dụng định lí hàm côsin:

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow b^2=a^2+c^2-c^2\Leftrightarrow a=b$

Suy ra: $\Delta$ ABC cân.

b. Ta có:

$$(p-b)\cot\frac{C}{2}=p\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{p-b}{p}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{a+c-b}{a+c+b}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}$$

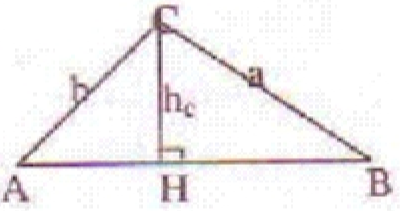
Áp dụng định lí hàm sin: $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$, thay vào: $\dfrac{\sin A+\sin C-\sin B}{\sin A+\sin C+\sin B}=\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow A=B\Rightarrow\Delta ABC \text{ cân.}$$

**Bài 3.** Nhận dạng tam giác ABC, biết

a. $h_c^2=ab\cos^2\dfrac{C}{2}$.   b. $\dfrac{\sin C}{\sin B}=2\cos A$.

### Giải



a. Ta có: $h_c^2=ab\cos^2\dfrac{C}{2}\Leftrightarrow\dfrac{h_c}{a}.\dfrac{h_c}{b}=\cos^2\dfrac{C}{2}$

Đặt: $\widehat{HCB}=\alpha$ và $\widehat{HCA}=\beta$

Ta có: $\cos\alpha=\dfrac{h_c}{a}$ và $\cos\beta=\dfrac{h_c}{b}$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha\cos\beta=2\cos^2\frac{C}{2}\Leftrightarrow\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=1+\cos C$$

$$\Leftrightarrow\cos C+\cos(\alpha-\beta)=1+\cos C\Leftrightarrow\cos(\alpha-\beta)=1\Rightarrow\alpha=\beta$$

Suy ra: $h_c$ là phân giác góc $C\Rightarrow\Delta ABC$ cân.

b. Ta có: $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$

$\Leftrightarrow \sin C = 2\cos A \sin B \Leftrightarrow \sin(A+B) = \sin(A+B) + \sin(B-A)$

$\Leftrightarrow \sin(B-A) = 0 \Leftrightarrow A = B \Rightarrow \Delta ABC$ cân.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác cân.

a. $\dfrac{1+\cos B}{1-\cos B} = \dfrac{2a+c}{2a-c}$.

b. $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$.

c. $\sin\dfrac{A}{2}\cos^3\dfrac{B}{2} = \sin\dfrac{B}{2}\cos^3\dfrac{A}{2}$.

d. $\tan A + \tan B = 2\cot\dfrac{C}{2}$.

**Bài 2.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác cân.

a. $(p-a)\sin^2 A + (p-b)\sin^2 B = c\sin A\sin B$.

b. $\sin C = 2\sin B\sin A\tan\dfrac{C}{2}$.

c. $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\cot\dfrac{C}{2}$.

d. $\sin^4 C + 2\sin^4 A + 2\sin B = 2\sin^2 C(\sin^2 A + \sin^2 B)$.

**Bài 3.** Nhận dạng tam giác ABC, biết

a. $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$.

b. $\sin(3A-3B) + \sin(3B-3C) + \sin(3C-3A) = 0$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. $\dfrac{1+\cos B}{1-\cos B} = \dfrac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1+\cos B}{1-\cos B} = 1 + \dfrac{2a+c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow c = 2a\cos B = \dfrac{2a(a^2+b^2-c^2)}{2ac} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Leftrightarrow a = b$.

b. $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow a\left(\tan A - \tan\dfrac{A+B}{2}\right) = b\left(\tan\dfrac{A+B}{2} - \tan B\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ a\cos B=b\cos A\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ \sin A\cos B-\sin B\cos A=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ \sin(A-B)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow A=B \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân.}$$

c. $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)=\tan\frac{B}{2}\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}=0 \Leftrightarrow A=B.$$

d. $\tan A+\tan B=2\cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan A+\tan B=2\tan\frac{A+B}{2}$

$$\Leftrightarrow \tan A-\tan\frac{A+B}{2}=\tan\frac{A+B}{2}-\tan B$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ \cos A=\cos B\end{array}\right. \Leftrightarrow A=B.$$

**Bài 2.** a. Ta có: $\sin A=\frac{a}{2R}$ và $\sin B=\frac{b}{2R}$

$$(p-a)\sin^2A+(p-b)\sin^2B=c\sin A\sin B$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-a)a^2}{4R^2}+\frac{(p-b)b^2}{4R^2}=\frac{abc}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow (p-a)a^2+(p-b)b^2=abc \Leftrightarrow \frac{(p-a)a}{bc}+\frac{(p-b)b}{ac}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-a)a}{bc}+\frac{p(p-b)b}{ac}=p \qquad (*)$$

Ta có:

$$\frac{p(p-a)a}{bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)a}{4bc}=\frac{(b^2+c^2+2bc-a^2)a}{4bc}=\frac{\left(1+\cos A\right)a}{2}$$

$$\frac{p(p-b)b}{ac}=\frac{(a+b+c)(a+c-b)b}{4ac}=\frac{(a^2+c^2+2ac-b^2)b}{4ac}=\frac{(1+\cos B)b}{2}$$

Thay vào (*): $\frac{\left(1+\cos A\right)a}{2}+\frac{\left(1+\cos B\right)b}{2}=\frac{a+b+c}{2}$

$\Leftrightarrow a\cos A+b\cos B=c$

$\Leftrightarrow \sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin C\Leftrightarrow \sin 2A+\sin 2B=2\sin\left(A+B\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)=\sin\left(A+B\right)\Leftrightarrow \cos\left(A-B\right)=1\Leftrightarrow A=B$.

b. $\sin C=2\sin B\sin A\tan\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin B\sin A\tan\frac{C}{2}\Leftrightarrow \cos^2\frac{C}{2}=\sin B\sin A$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos C}{2}=\frac{\cos\left(A-B\right)-\cos\left(A+B\right)}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\cos C=\cos\left(A-B\right)+\cos C$

$\Leftrightarrow \cos\left(A-B\right)=1\Leftrightarrow A=B$.

c. $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=c^2\cot\frac{C}{2}\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B+\sin^2 B\sin 2A=\sin^2 C\cot\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B\ \left(\sin A\cos B+\cos A\sin B\right)=\sin C\cos^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B\ \sin\left(A+B\right)=\sin C\cos^2\frac{C}{2}\Leftrightarrow \sin A\sin B=\cos^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(A-B\right)-\cos\left(A+B\right)=1+\cos C\Leftrightarrow \cos\left(A-B\right)=1\Leftrightarrow A=B$.

d. Áp dụng định lí hàm sin, thay vào:

$\sin^4 C+2\sin^4 A+2\sin B=2\sin^2 C\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)$

Ta có: $\frac{c^4}{16R^4}+\frac{2a^4}{16R^4}+\frac{2b^4}{16R^4}=\frac{2c^2}{4R^2}\left(\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}\right)$

$\Leftrightarrow c^4+2a^4+2b^4=2c^2\left(a^2+b^2\right)$

$$\Leftrightarrow c^4 - 2c^2\left(a^2+b^2\right) + 2a^4 + 2b^4 = 0 \Leftrightarrow \left[c^2 - \left(a^2+b^2\right)\right]^2 + \left(a^2-b^2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân.}$$

**Bài 3.** a. $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$

$\Leftrightarrow \sin^2 B \tan C = \sin^2 C \tan B \Leftrightarrow \sin 2B = \sin 2C \Leftrightarrow B = C$

Suy ra: $\Delta ABC$ cân.

b. Đặt $\begin{cases} x = 3A - 3B \\ y = 3B - 3C \\ z = 3C - 3A \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2} = 0 \end{cases}$

$\sin(3A-3B) + \sin(3B-3C) + \sin(3C-3A) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ \sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y+z=0 \\ \sin\dfrac{y}{2} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y+z=0 \\ \sin\dfrac{z}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x = k2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x+y+z=0 \\ y = k2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x+y+z=0 \\ z = k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |A-B| = 0 \\ |A-B| = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} |B-C| = 0 \\ |B-C| = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} |A-C| = 0 \\ |B-C| = \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Suy ra tam giác ABC cân hoặc tam giác ABC có hai góc với hiệu bằng $\dfrac{2\pi}{3}$.

## 3. TAM GIÁC VUÔNG

**Bài 1.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác vuông.

a. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$.

b. $\dfrac{1}{\sin A} + \cot A = \dfrac{a}{c-b}$.

**Giải**

a. Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$$

$$\Leftrightarrow \cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]=0 \Leftrightarrow \cos C\cos B\cos A=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A=0\\ \cos B=0\\ \cos C=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=90^0\\ B=90^0\\ C=90^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

b. Ta có: $\frac{1}{\sin A}+\cot A=\frac{a}{c-b} \Leftrightarrow \frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{\sin C-\sin B}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}=\sin\frac{C-B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2}=\frac{C-B}{2} \Leftrightarrow C=A+B \Rightarrow C=90^0$$

Suy ra: $\Delta ABC$ vuông.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau. Chứng minh ABC là tam giác vuông hoặc cân.

a. $\left(b^2+c^2\right)\sin(C-B)=\left(c^2-b^2\right)\sin(C+B)$.

b. $a\cos B-b\cos A=a\sin A-b\sin B$.

### Giải

a. Ta có: $\left(b^2+c^2\right)\sin(C-B)=\left(c^2-b^2\right)\sin(C+B)$

$$\Leftrightarrow b^2\left[\sin(C-B)+\sin(C+B)\right]=c^2\left[\sin(C+B)-\sin(C-B)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B\sin C\cos B=2\sin^2 C\cos C\sin B \Leftrightarrow \sin 2B-\sin 2C=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(B+C)\sin(B-C)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(B+C)=0\\ \sin(B-C)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=90^0\\ B=C\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông hoặc cân.

b. Ta có: $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(A-B)=0\\ \sin(A+B)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(A-B)=0\\ \sin C=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ C=90^0\end{array}\right.$$

Suy ra: $\Delta ABC$ vuông hoặc cân.

**Bài 3.** Nhận dạng tam giác ABC , biết

a. $\begin{cases}\sin B = \left(\sqrt{2}-\cos C\right)\sin A\\ \sin C = \left(\sqrt{2}-\cos B\right)\sin A\end{cases}$

b. $\begin{cases}a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\cos B\\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B\end{cases}$

**Giải**

a. Ta có: $\begin{cases}\sin B = (\sqrt{2}-\cos C)\sin A\\ \sin C = (\sqrt{2}-\cos B)\sin A\end{cases} \Rightarrow \sin B - \sin C = \sin A(\cos B - \cos C) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = -2\sin A\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin A\cos\frac{A}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Thế vào, ta có: $\sin B = \left(\sqrt{2}-\cos B\right)\sin 2B \Leftrightarrow 2\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos B - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 45^0$$

Suy ra: $B = C = 45^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân.

b. Ta có: $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\cos B$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = 4\sin A\sin B\cos A\cos B$$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B + \cos A\sin B = 2\cos A\sin B$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

Thay vào, ta có:

$\sin 2A + \sin 2A = 4\sin^2 A \Leftrightarrow \cos A = \sin A \Leftrightarrow \tan A = 1 \Leftrightarrow A = 45^0$

Suy ra: $A = B = 45^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 1.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác vuông.

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$.

b. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$.

c. $\dfrac{\cos(B - C)}{\sin A + \sin(C - B)} = \tan B$.

d. $\cot 2C = \dfrac{\cot C - \cot B}{2}$.

**Bài 2.** Chứng minh rằng tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác vuông.

a. $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}$.

b. $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B\sin C}$.

c. $S = \dfrac{a^2}{4}\sin 2B$.

d. $\sin A = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin C}{2}$.

**Bài 3.** Nhận dạng tam giác ABC, biết

a. $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$.

b. $\cos B = \dfrac{(a + b)(b + c - a)(a + c - b)}{2abc}$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

và $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Suy ra: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = 90^0$.

b. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

$\Leftrightarrow 3\cos B + 4\sin B + 2(3\sin C + 4\cos C) = 15$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos B + \frac{4}{5}\sin B + 2\left(\frac{3}{5}\sin C + \frac{4}{5}\cos C\right) = 3$.

Đặt: $\frac{4}{5} = \cos\varphi \Rightarrow \frac{3}{5} = \sin\varphi$

Ta có: $\sin\varphi\cos B + \cos\varphi\sin B + 2(\sin\varphi\sin C + \cos\varphi\cos C) = 3$

$\Leftrightarrow \sin(\varphi + B) + 2\cos(C - \varphi) = 3$

Suy ra: $\begin{cases}\sin(\varphi + B) = 1 \\ \cos(C - \varphi) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi + B = 90^0 \\ C = \varphi\end{cases} \Rightarrow C + B = 90^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông.

c. $\frac{\cos(B - C)}{\sin A + \sin(C - B)} = \tan B \Leftrightarrow \frac{\cos(B - C)}{\sin(B + C) + \sin(C - B)} = \frac{\sin B}{\cos B}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos(B - C)}{2\sin C\cos B} = \frac{\sin B}{\cos B}$

$\Leftrightarrow \cos(B - C) = 2\sin C\sin B \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^0$.

d. $\cot 2C = \frac{\cot C - \cot B}{2} \Leftrightarrow \frac{2\cos 2C}{\sin 2C} = \frac{1}{\tan C} - \frac{1}{\tan B}$

$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2C}{\sin 2C} = \frac{\tan B - \tan C}{\tan C\tan B}$

$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2C}{\sin 2C} = \frac{\sin(B - C)}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow \cos 2C\sin B = \cos C\sin(B - C)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{4R^2+12R^3}=\frac{c^2}{16R^2}\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{16R^2}=\frac{c^2}{16R^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2.$$

**Bài 3. a.** Áp dụng định lí hàm sin: $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

Ta có: $(a^2-b^2)\sin(A+B)=4R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)\sin(A+B)$

$$=4R^2(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)\sin(A+B)$$

$$=16R^2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin(A+B)$$

$$=4R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin(A+B)$$

$$=4R^2\sin^2 C\sin(A-B)=c^2\sin(A-B)$$

Suy ra: $(a^3+b^2)\sin(A-B)=c^2\sin(A-B)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2\\A=B\end{array}\right.$ nên $\Delta ABC$ vuông hoặc cân.

b. Áp dụng định lí hàm côsin:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Leftrightarrow 2abc\cos A=a\left(b^2+c^2\right)-a^3$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Leftrightarrow 2abc\cos B=b\left(a^2+c^2\right)-b^3$$

$$\Rightarrow 2abc(\cos A+\cos B)=a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3\right)$$

$$=(a+b)\left[c^2-(a-b)^2\right]=(a+b)(c+b-a)(c+a-b)$$

Suy ra:

$$\cos A+\cos B=\frac{(a+b)(c+b-a)(c+a-b)}{2abc}=\cos B$$

$$\Leftrightarrow\cos A=0\Leftrightarrow A=90^0.$$

**********

# MỤC LỤC

CHƯƠNG I: BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC ........ 5

*Dạng 1:* Rút gọn các biểu thức lượng giác. ........ 7

*Dạng 2:* Tính giá trị các biểu thức lượng giác ........ 10

*Dạng 3:* Chứng minh giá trị của biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến số. ........ 13

*Dạng 4:* Chứng minh các đẳng thức có điều kiện. ........ 15

*Dạng 5:* Tính tổng hữu hạn và tích hữu hạn ........ 18

CHƯƠNG II: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ........ 52

§1. Phương trình lượng giác cơ bản ........ 52

§2. Phương trình chứa một hàm số lượng giác ........ 83

*Dạng1:* Phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác sin, cos ........ 83

*Dạng 2:* Phương trình theo một hàm lượng giác $f(\tan x)=0$ ........ 99

§3. Phương trình bậc nhất - Thuần nhất bậc hai - Đối xứng đối với sinx và cosx ........ 109

I. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx ........ 109

II. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx ........ 115

III. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx ........ 118

§4. Phương trình lượng giác không mẫu mực ........ 125

*Dạng 1:* Phương trình dạng tích bằng không. ........ 125

*Dạng 2:* Phương trình dạng tổng các bình phương bằng 0 ........ 153

*Dạng 3:* Phương trình dạng $f(x) \le \alpha, g(x) \ge \alpha, f(x)=g(x)$ ........ 155

CHƯƠNG III: BÀI TOÁN TAM GIÁC ........ 164

*Dạng 1:* Chứng minh đẳng thức trong tam giác ........ 165

*Dạng 2:* Tính toán các yếu tố trong tam giác ........ 172

*Dạng 3:* Nhận dạng tam giác. ........ 185